

UE zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, SS 2022, Blatt 3

1. Sei A_1, A_2, \dots eine Folge von Ereignissen und $B := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Man interpretiert B als das Ereignis, dass unendlich viele der A_k eintreten. Man zeige, dass $\mathbb{P}(B) = 0$ ist, wenn $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) < \infty$ gilt. Hinweis: $B \subseteq \bigcup_{k \geq n} A_k$ für alle n , woraus $\mathbb{P}(B) \leq \sum_{k \geq n} \mathbb{P}(A_k)$ folgt.
2. Seien A_1, A_2, \dots unabhängige Ereignisse und $B := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$. Man zeige, dass $\mathbb{P}(B) = 1$ ist, wenn $\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ gilt. Hinweis: Sei $B_n := \bigcup_{k \geq n} A_k$, sodass $B_n \supseteq \bigcup_{k=n}^{n+m} A_k$ für alle $m \geq 1$ gilt. Wegen Aufgabe 25 und $1 - x \leq e^{-x}$ erhalten wir $\mathbb{P}(B_n) \geq 1 - \prod_{k=n}^{n+m} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \geq 1 - \exp[-\mathbb{P}(A_n) - \dots - \mathbb{P}(A_{n+m})]$. Daraus folgt $\mathbb{P}(B_n) = 1$. Jetzt den Stetigkeitssatz verwenden.
3. Für das Lebesgue'sche Maß λ auf \mathbb{R} , zeigen Sie dass abzählbare Mengen Nullmengen sind.
4. Für das Lebesgue'sche Maß λ auf \mathbb{R} , zeigen Sie dass $\lambda([a, b]) = b - a$ für alle $a < b$. Hierfür brauchen Sie nur dass das Lebesgue'sche Maß σ -additiv und translationsinvariant ist und normiert so dass $\lambda([0, 1]) = 1$.
5. Sei $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ der Raum von 0-1-Folgen mit Produkt Topologie. Zeigen Sie dass die Menge $\{x \in X : x_i = 1 \text{ nur endlich oft}\}$ zwar Borel aber nicht offen oder abgeschlossen ist.
6. Wir definieren die Mittel- ϵ_n Cantor Menge in $[0, 1]$ als $C = \bigcap_n C_n$, wobei $C_0 = [0, 1]$ und C_n entsteht aus C_{n-1} indem von allen Intervall Komponenten J von C_{n-1} das mittlere Intervall der Länge $\epsilon_n |J|$ entfernt wird. Wir nehmen immer an dass $\epsilon_n \in (0, 1)$. Zum Beispiel, wenn $\epsilon_n = \frac{1}{3}$ für alle $n \geq 1$, dann C ist die Mitteldrittel Menge.
Wie schnell müssen die ϵ_n fallen damit das Lebesgue'sche Maß $\lambda(C) > 0$?
7. Ein Würfel wird unendlich oft geworfen und das i -te Ergebnis heißt $X_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Beschreiben Sie den zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum, Borel σ -Algebra und Bernoulli-Maß.— Sind die folgende Ergebnisse Borel Mengen? Berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeit:
 - (i) Die Eins wird unendlich oft geworfen.
 - (ii) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq 4$.
 - (iii) Von einem gewissen n abwärts ist die Anzahl geworfener Einsen immer größer als die Anzahl Zweien.
8. Finden Sie eine Menge in $[0, 1]$ die nicht Borel ist. Finden Sie eine Nullmenge in $[0, 1]$ die nicht Borel ist.

9. Eine Folge von Zufallsvariablen S_n **konvergiert** zu S **im 2-ten Mittel** falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|S_n - S|^2) = 0.$$

Sei nun $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$, wobei (X_i) eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartung μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ ist. Zeigen Sie dass S_n im 2-ten Mittel gegen μ konvergiert. (Hier wird μ also als eine Zufallsvariable die nur den Wert μ annimmt aufgefasst.)

10. Man bestimme den Erwartungswert und der Varianz einer ZV X mit Dichte $f(x) := 1_{(0,1)}(x) 12x^2(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$.
11. Sei X eine ZV mit Dichte f_X und endlichem k -tem Moment. Berechnen Sie die Dichte von X^k .
12. Berechnen Sie das k -te Moment der Standardnormalverteilung. (Hinweis: partielle Integration).
13. Dichte f und Verteilungsfunktion F der Standard-Normalverteilung erfüllen

$$f(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) < 1 - F(x) < f(x) \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0.$$

(Hinweis: Ableitungen vergleichen.)

14. Es seien X und Y unabhängig und $E(\lambda)$ - bzw $E(\mu)$ -verteilt. Welche Dichte hat $X + Y$?
15. Es sei X eine ZV mit Dichte $f(x) := \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ (die Cauchy Verteilung). Man bestimme die Dichte von $Y := \frac{1}{X}$.
16. Der Zufallsvektor (X, Y) habe Dichte f . Welche Dichte hat $Z := XY$?
17. Der Zufallsvektor (X, Y) habe Dichte f . Welche Dichte haben $R := \sqrt{X^2 + Y^2}$ und der Winkel S zwischen x -Achse und dem Vektor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$? Welche Dichte hat (R, S) ?
18. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte $f(x, y) := 1_{(0,4) \times (1,5)}(x, y) \frac{xy}{96}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Man bestimme $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY]$, $\mathbb{E}[2X + 3Y]$.
19. Es seien X und Y unabhängig und beide $E(\lambda)$ -verteilt. Welche Dichten haben $X - Y$ und $\frac{X}{X+Y}$?
20. Es seien X und Y unabhängig und beide auf $[0, 1]$ uniform verteilt. Welche Dichten haben XY und X/Y ?
21. Es seien X und Y unabhängig und beide $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt. Welche Dichte hat $\sqrt{X^2 + Y^2}$?