UE zu Wahrscheinlichkietstheorie und Statistik, SS 2025, Blatt 2

1. Zwei Würfel, $\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,\ldots,6\}\}$. Sei $A = \{(i,j) : i+j = 5 \text{ oder } 6\}$ und $B = \{(i,j) : i-j = 2\}$. Sind A und B unabhängig?

2. Durch ein Loch in einer dicken Mauer hängen 10 Schnüre. Du stehtst am einer Seite des Lochs und knüpfst die Ende der Schnüre paarweise zusammen. An der anderen Seite des Lochs steht dein Freund, und auch er knüpft die Ende der Schnüre and seiner Seite paarweise zusammen, ohne zu wissen wie du das gemacht hast. Was ist die Wahrscheinlichkeit dass die Schnüre alle zusammen jetzt eine Schleife formen?

3. Das Licht auf einer Flur kann mittels zwei Schaltern, S_1 und S_2, an oder ausgeschaltet werden. Wir fassen diese Schalter auf als unabhängige Zufallsvariabelen wobei $S_i = 0$ und $S_i = 1$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Das Licht leuchtet genau dann wenn $S_1 = S_2$. Ist das Ereignis dass das Licht leuchtet unabhängig von S_1 und S_2?

4. Bei einem bestimmten Prüfverfahren in der Qualitätskontrolle wird ein Ausschussstück mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.98 erkannt. Ein einwandfreies Stück wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 als solches eingestuft. Die Produktion enthält 3% Ausschuss. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerhaft eingestuftes Stück tatsächlich Ausschuss ist?

5. Morsezeichen Punkt und Strich werden im Verhältnis 3:4 gesendet. Durch Übertragungsfehler wird Punkt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{40}$ zu Strich und Strich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{50}$ zu Punkt. Es wird Punkt registriert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde Punkt gesendet?

6. In einem Laden ist eine Alarmanlage, die im Fall eines Einbruchs mit Wahrscheinlichkeit 0.99 die Polizei alarmiert. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit Wahrscheinlichkeit 0.002 Fehlalarm ausgelöst. Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht beträgt 0.0005. Die Alarmanlage hat gerade Alarm gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Einbruch im Gange?

7. Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$ (E(λ)-verteilt), habe also die W-Dichte $f(x) := \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \in [0,\infty))$. Für $s,t \geq 0$ gilt dann $\mathbb{P}[X > t+s \mid X > s] = \mathbb{P}[X > t]$.

8. Sei T die Lebensdauer einer Lampe; wir nehmen an sie ist exponential verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T > 26 | T > 25)$ und auch die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(T | T > 100)$. (Schlußfolgerung: Abnutzung spielt keine Rolle!)

9. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und $a \in \mathbb{R}$. Man berechne die Verteilungsfunktion von $Y := \max(0, X-a)$.

10. Eine Latte der Länge 1 zerbricht an einer beliebigen Stelle (uniforme Verteilung). Sei X die Länge des längsten Stucks. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und Erwartung von X.

11. Sei $\Phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ein uniformverteilter Winkel, und $X = \tan(\Phi)$. Zeigen Sie dass X eine Cauchy-Verteilung hat, also mit Dichte $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2+1}$.

12. Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$, tatsächlich eine W-Dichte ist, das heißt dass $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = 1$ gilt. Es gibt viele Wege, dies zu überprüfen. Versuchen Sie den folgenden und nutzen Sie die Gelegenheit, die verwendeten Resultate der Analysis (im Detail) zu wiederholen:
Bestimme zuerst das Integral $I_b := \int\int_{\{(x,y):x^2+y^2 \leq b^2\}} e^{-x^2-y^2} dx$ $(b > 0)$ über die Kreisscheibe vom Radius b durch Übergang zu Polarkoordinaten, und damit $I := \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx$. Drücke I dann als Grenzwert der Integrale über Quadrate der Kantenlänge $2a$ aus, $\int\int_{[-a,a]^2} e^{-x^2-y^2} dx$.

13. Die Gamma-Funktion wird gegeben durch

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy.$$

Zeigen Sie dass $\Gamma(n) = (n-1)!$ (und dass deswegen $0! = 1$ angemessen ist). Zeigen Sie dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Hinweis: $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt$ plus vorherige Aufgabe.

14. Als Vorbereitung zum Weihnachtsfeier ziehen n Personen Lose (mit den eigenen Namen) um zu bestimmen wer für wen ein Weihnachtsgeschenk kaufen soll. Wenn jemand sich selber zieht muss die Losung nochmal gemacht werden. Berechne (mit der "Regel von Inklusion und Exklusion) dass die Wahrscheinlichkeit dass jemand sich selbst zieht gleich

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots (-1)^n \frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

ist.

15. Die Walnußernte war schrecklich dieses Jahr. Nur eine in vier Schalen enthält tatsächlich eine Nuß. Wie viele Nüße muß ich kaufen um mit 95% Sicherheit wenigstens drei gute Nüße zu haben? Verwenden Sie wenn nötig eine Tabelle (zum Beispiel
https://mat.iitm.ac.in/home/vetri/public_html/statistics/binomial.pdf oder
https://www.mat.univie.ac.at/~bruin/BinomialProbabTable.pdf).

16. Berechnen Sie die Erwartung und Varianz der
    (a) uniformen Verteilung (auf dem Einheitsintervall);
    (b) geometrischen Verteilung.

17. Berechne $\mathbb{E}(X)$ der Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{16}, & 0 \leq x < 2; \\ x - \frac{x^2}{8} - 1, & 2 \leq x < 4; \\ 1, & 4 \leq x. \end{cases}$$