UE zu Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, SS 2025, Blatt 1

1. Es wird mit einem Würfel sechs Mal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sechs verschiedene Augenzahlen zu erhalten?
2. Man würfelt dreimal hintereinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit
   (a) ist die Augensumme kleiner oder gleich 6?
   (b) tritt keine gerade Zahl auf?
   (c) tritt die Augenzahl 1 genau einmal auf?
3. Ein Multiple-Choice Test besteht aus 4 Fragen, bei jeder stehen drei Antworten zur Auswahl. Nur eine davon ist jeweils richtig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch zufälliges Raten a) alle vier Fragen b) nur eine Frage c) mindestens zwei Fragen richtig zu beantworten?
4. Ein Lehrer bestimmt die Noten so: Er würfelt mit einem Würfel dreimal hintereinander und nimmt das Minimum der Augenzahlen und der Zahl 5 als Note. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Noten?
5. Zwei Spieler A und B spielen folgendes Spiel. Es wird mit viermal gewürfelt. Tritt mindestens einmal 6 auf, dann gewinnt A sonst B. Ist das Spiel fair?
6. Beim würfeln mit drei Würfeln kann die Augenzahl 10 auf sechs verschiedenen Arten erreicht werden: 631, 622, 541, 532, 442, 433. Augenzahl 9 kann ebenso auf sechs Arten erreicht werden. Ist die Wahrscheinlichkeit 10 zu würfeln denn auch genau so groß als 9 zu würfeln? Warum (nicht)?
7. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 5 zufällig gewählten Personen mindestens zwei [genau zwei] am gleichen Wochentag geboren?
8. Ich habe eine Münze von der ich nicht weiss ob sie fair ist. Mit welchem Verfahren kann ich trotzdem einen fairen Toss simulieren?
9. In einem Schubfach sind 4 schwarze, 6 rote und 2 weiße Socken. Zwei Socken werden zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie die gleiche Farbe haben?
10. In einer Schachtel sind 4 weiße, 3 schwarze und 1 rote Kugel. Es werden 2 Kugeln hintereinander ohne Zurücklegen gezogen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:
    (a) Beide Kugeln haben dieselbe Farbe
    (b) Eine Kugel ist rot, eine ist weiß
    (c) Die zweite Kugel ist schwarz

(d) Keine der Kugeln ist weiß

11. Aus 52 Spielkarten, die aus 13 $\heartsuit$-Karten, 13 $\diamondsuit$-Karten, 13 $\spadesuit$-Karten und 13 $\clubsuit$-Karten bestehen, wird eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 17 gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei 5 $\heartsuit$-Karten, 3 $\diamondsuit$-Karten, 7 $\spadesuit$-Karten und 2 $\clubsuit$-Karten zu ziehen?

12. Eine Schachtel enthält n Kugeln, durchnumeriert mit $1, 2, \ldots, n$. Wir ziehen mit Zurücklegen aus der Schachtel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir erstmals beim k-ten Zug eine Kugel ziehen, die wir vorher schon einmal gezogen hatten?

13. Aus 20 Spielkarten (5 von jeder Kartenfarbe) werden zufällig 4 Spielkarten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, vier verschiedene Kartenfarben zu ziehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau zwei verschiedene Kartenfarben zu erhalten?

14. Peter und Paul spielen das folgende Spiel mit einer fairen Münze. Sie wählen beide eine Kombination von zwei Münzereignissen, also KK, KZ, ZK order ZZ. Dann wird die Münze geworfen und wessen gewählte Kombination zuerst auftaucht gewinnt.

    Ist dieses Spiel fair? Wenn Peter und Paul unabhängig ihre Wahl machen, und wenn Peter zuerst wählt und Paul mit dieser Information danach? Was ist die beste Gewinnstrategie?

15. Jemand möchte 100 Mal Lotto spielen. Ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Sechser zu gewinnen, größer, wenn man die 100 Tipps in 100 aufeinanderfolgenden Spielrunden abgibt, oder wenn man 100 Tipps bei einer Spielrunde abgibt?

16. Jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab. Wie viele Runden wären erforderlich, um mit Wahrscheinlichkeit ≥ 0.95 mindestens einen Sechser zu erzielen?

17. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde keine zwei benachbarten Zahlen sind? Hinweis: Die Abbildung $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6) \mapsto (i_1, i_2 - 1, i_3 - 2, i_4 - 3, i_5 - 4, i_6 - 5)$ ist eine bijektive Abbildung aller der Größe nach geordneten 6-Tupel ohne benachbarte Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 45\}$ auf alle der Größe nach geordneten 6-Tupel aus $\{1, 2, \ldots, 40\}$.

18. Petra und Paula würfeln abwechselnd, wobei Petra beginnt. Das Spiel endet mit einem Sieg von Petra, wenn Petra 5 oder 6 wirft. Das Spiel endet mit einem Sieg von Paula, wenn Paula 4, 5 oder 6 wirft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Petra gewinnt?

19. Gegeben sind vier Würfel mit den Augenzahlen 004444, 333333, 222266 und 111555. Die Spieler A und B spielen folgendes Spiel: A wählt einen

der Würfel. Dann wählt B einen der übrigen Würfel. Wer die größere Augenzahl wirft hat gewonnen. B kann den Würfel immer so wählen, dass sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnt.