7.4 Zwei Sätze von Weierstraß

Satz 7.24. *Es gibt Funktionen, die überall stetig aber nirgends differenzierbar sind.*

Beweis. Für $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \frac{1}{4^n}\sin(4^{2n}x)$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Da $|f_n(x)| \leq \frac{1}{4^n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} < \infty$, konvergiert $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig und f ist stetig.

1. Behauptung: Bezeichnet $s_N(x) := \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$, so gilt

$$|s_{N-1}(x) - s_{N-1}(y)| \leq \frac{4^N}{3}|x-y| \quad \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ und } x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis der 1. Behauptung: Laut Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es zu allen $n \geq 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ ein ξ zwischen x und y, sodaß

$$f_n(x) - f_n(y) = (x-y)f_n'(\xi) = (x-y)\frac{1}{4^n}4^{2n}\cos(4^{2n}\xi) = (x-y)4^n\cos(4^{2n}\xi),$$

woraus folgt, daß $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 4^n|x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq 0$ und daher

$$|s_{N-1}(x) - s_{N-1}(y)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y| \sum_{n=0}^{N-1} 4^n = \frac{4^N - 1}{4-1}|x-y| \leq \frac{4^N}{3}|x-y|.$$

2. Behauptung: Ist $N \in \mathbb{N}$ und sind x, y zwei aufeinander folgende Vielfache von $\frac{1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}$, so gilt

$$|f(x) - f(y)| > 4^{N-1}|x-y| = \frac{1}{4^N}\frac{\pi}{8}.$$

Beweis der 2. Behauptung: Seien zunächst $x = \frac{2k}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{2k+1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}$. Für $n \geq N$ gilt

$$f_n(x) = \frac{1}{4^n}\sin\Big(4^{2n}\frac{2k}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{4^n}\sin\big(4^{2(n-N)}k\pi\big) = 0$$

und daher $f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x) = s_{N-1}(x)$. Weiters ist

$$f_N(y) = \frac{1}{4^N}\sin\Big(4^{2N}\frac{2k+1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{4^N}\sin\Big(k\pi + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{(-1)^k}{4^N}$$

und für $n > N$ ist

$$f_n(y) = \frac{1}{4^n}\sin\Big(4^{2n}\frac{2k+1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{4^n}\sin\Big(4^{2(n-N)}\Big(k\pi + \frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 0.$$

Daraus folgt

$$f(y) = \sum_{n=0}^{N-1} f_n(y) + f_N(y) = s_{N-1}(y) + \frac{(-1)^k}{4^N}$$

und daher

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \Big|\frac{(-1)^{k+1}}{4^N} + s_{N-1}(x) - s_{N-1}(y)\Big| \geq \Big|\frac{(-1)^{k+1}}{4^N}\Big| - \big|s_{N-1}(x) - s_{N-1}(y)\big| \\ &\geq \frac{1}{4^N} - \frac{4^N}{3}|x-y| = \frac{1}{4^N} - \frac{4^N}{3}\frac{1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4^N} - \frac{1}{4^N}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4^N}\Big(1 - \frac{\pi}{6}\Big) > \frac{1}{4^N}\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

Der Beweis der 2. Behauptung verläuft völlig analog wenn $x = \frac{2k+1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{2k+2}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}$.
Beweis des Satzes: Angenommen, $f'(x_0)$ existiert für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und es sei

$$\alpha := \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}.$$

Dann existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, daß aus $0 < |\xi - x_0| < \delta$ folgt, daß

$$\Big|\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} - \alpha\Big| < 1.$$

Für $|\xi - x_0| < \delta$ gilt dann $|f(\xi) - f(x_0)| \leq (|\alpha|+1)|\xi - x_0|$ (und zwar auch für $\xi = x_0$). Wähle nun ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß einerseits $\frac{1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2} < \delta$ und andererseits $4^{N-1} > |\alpha|+1$. Seien x, y zwei aufeinander folgende Vielfache von $\frac{1}{4^{2N}}\frac{\pi}{2}$, sodaß $x \leq x_0 < y$. Da $0 \leq |x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| \leq (|\alpha|+1)(x_0 - x)$ und da $0 < |y - x_0| < \delta$ gilt $|f(y) - f(x_0)| \leq (|\alpha|+1)(y - x_0)$. Daraus ergibt sich wegen

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| \leq (|\alpha| + 1)(x_0 - x + y - x_0) \\ &= (|\alpha| + 1)(y - x) < 4^{N-1}(y - x) = \frac{1}{4^N}\frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Aussage der 2. Behauptung.

Bemerkungen. (1) Die Funktion f aus dem Beweis von Satz 7.24 liefert auch ein Beispiel dafür, daß der gleichmäßige Limes differenzierbarer Funktionen nicht differenzierbar zu sein braucht.
(2) Obwohl einem das f aus dem Beweis von Satz 7.24 vielleicht pathologisch vorkommen mag, kann man zeigen, daß in einem gewissen Sinn der Großteil aller stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ nirgends differenzierbar sind.

Satz 7.25. *Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es eine Folge von Polynomen, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Definition. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Das n-te zu f gehörende Bernsteinpolynom wird definiert als
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Beispiele. (1) Es sei $f(x) = 1$. Dann ist
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(x + (1-x)\big)^n = 1 = f(x).$$

(2) Es sei $f(x) = x$. Dann ist
$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} = x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\
&= x\big(x + (1-x)\big)^{n-1} = x = f(x).
\end{aligned}$$

(3) Es sei $f(x) = x(1-x)$. Dann ist
$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\Big(1-\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x(1-x)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n-k)}{n^2}\frac{n!}{k!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= x(1-x)\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= x(1-x)\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-2-(k-1))!} x^{k-1}(1-x)^{(n-2)-(k-1)} \\
&= \Big(1-\frac{1}{n}\Big)x(1-x)\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} \\
&= \Big(1-\frac{1}{n}\Big)x(1-x)\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} \\
&= \Big(1-\frac{1}{n}\Big)x(1-x)\big(x+(1-x)\big)^{n-2} = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)x(1-x) = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)f(x).
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 7.25. Es sei zunächst $[a,b]=[0,1]$. Für alle $x\in[0,1]$ sieht man mit Hilfe der eben durchgerechneten drei Beispiele, daß

$$\begin{aligned}
0 &\le \sum_{k=0}^{n}\Big(x-\frac{k}{n}\Big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\cdot 1-2x\cdot x+\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{kn}{n^2}-\frac{k(n-k)}{n^2}\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= -x^2+\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= -x^2+x-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x(1-x)=x(1-x)-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)x(1-x)\\
&= \frac{1}{n}x(1-x)\le\frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

da $x(1-x)\le 1/4$ für alle $x\in[0,1]$. Wir behaupten nun: Zu jedem vorgegebenen $\varepsilon>0$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$, sodaß $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ für alle $n>N$ und alle $x\in[0,1]$. Da f stetig ist, gibt es nach Satz 3.11 ein $M>0$, sodaß $|f(x)|<M$ für alle $x\in[0,1]$. Da f nach Satz 3.16+i sogar gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta>0$ mit der Eigenschaft, daß für $x,y\in[0,1]$ aus $|x-y|<\delta$ folgt, daß $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. Weiters gilt die Identität

$$f(x)=f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Für vorgegebene $n\ge 0$ und $x\in[0,1]$ teilen wir die Menge $\{0,1,\dots,n\}$ nun in die zwei Teilmengen $A_n(x)$ und $B_n(x)$, die durch

$$A_n(x)=\Big\{k\in\{0,\dots,n\}\;\Big|\;\Big|x-\frac{k}{n}\Big|<\delta\Big\}\quad\text{und}\quad B_n(x)=\Big\{k\in\{0,\dots,n\}\;\Big|\;\Big|x-\frac{k}{n}\Big|\ge\delta\Big\}$$

gegeben sind. Für $k\in A_n(x)$ ist $|f(x)-f(\frac{k}{n})|<\varepsilon/2$. Für $k\in B_n(x)$ gilt

$$\Big|f(x)-f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\le 2M\le 2M\frac{|x-\frac{k}{n}|^2}{\delta^2}$$

da $|x-\frac{k}{n}|\ge\delta$.

Es sei nun $n > M/(\delta^2\varepsilon)$. Dann gilt für alle $x \in [0,1]$, daß

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - f_n(x)| \\
&\quad \le \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\in A_n(x)}} \left|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\in B_n(x)}} \left|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\in A_n(x)}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\in B_n(x)}} \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \Big(x - \frac{k}{n}\Big)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\quad \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\delta^2 n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Sei schließlich $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $[a,b]$ beliebig. Betrachte die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, die durch $g(y) = f\big(a + (b-a)y\big)$ gegeben ist. Da g stetig ist, gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Polynomfunktion $\tilde{p} : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodaß $|g(y) - \tilde{p}(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in [0,1]$. Die Polynomfunktion $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei durch $p(x) = \tilde{p}(\frac{x-a}{b-a})$ gegeben. Zu jedem $x \in [a,b]$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $y \in [0,1]$ mit $x = a + (b-a)y)$ (was zu $y = \frac{x-a}{b-a}$ äquivalent ist) und daher

$$|f(x) - p(x)| = |f\big(a + (b-a)y\big) - p\big(a + (b-a)y\big)| = |g(y) - \tilde{p}(y)| < \varepsilon.$$