Übungen zu Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt

WS 2024/25

Christoph Baxa

1) Drei Lehramtsstudenten machen gemeinsam Urlaub im Süden. Da sie wenig Geld haben, suchen sie eine billige Unterkunft. Tatsächlich finden sie ein günstiges Hotel, in dem sie gemeinsam um 30 Euro übernachten können. Jeder der drei bezahlt dem Rezeptionisten 10 Euro und sie gehen auf ihr Zimmer. Wenig später erkundigt sich der Hotelbesitzer beim Rezeptionisten nach der Buchungslage. Als er von den drei Studenten hört, macht er den Rezeptionisten darauf aufmerksam, dass das Hotel das Zimmer für Studenten sogar um nur 25 Euro anbietet. Also macht sich der Rezeptionist mit 5 Euro auf den Weg zu den Studenten. Unterwegs überlegt er sich, dass man die 5 Euro ja gar nicht vernünftig auf drei Personen aufteilen kann. Also gibt er jedem der drei nur einen Euro zurück und behält zwei Euro als Trinkgeld. Nun hat jeder der Studenten 9 Euro für das Zimmer bezahlt und der Rezeptionist hat 2 Euro. Das macht in Summe 29 Euro. Wo ist der 30. Euro geblieben?

2) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis. Wir wollen zeigen, dass $1 = 2$ gilt. Dazu wählen wir zwei beliebige Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a = b$.

$$\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab \\
a^2 + a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 + ab - 2ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2 \cdot (a^2 - ab) &= 1 \cdot (a^2 - ab) \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

3) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis. Wir wollen zeigen, dass $4 = 5$ gilt.

$$\begin{aligned} -20 &= -20 \\ 16 - 36 &= 25 - 45 \\ 16 - 36 + \tfrac{81}{4} &= 25 - 45 + \tfrac{81}{4} \\ 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2 \\ (4 - \tfrac{9}{2})^2 &= (5 - \tfrac{9}{2})^2 \\ 4 - \tfrac{9}{2} &= 5 - \tfrac{9}{2} \\ 4 &= 5 \end{aligned}$$

4) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
Beweis. Wir zeigen $1 = 2 = \cdots = n$ durch Induktion.
Induktionsanfang: Die Behauptung stimmt für $n = 1$, denn $1 = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Es gilt $1 = 2 = \cdots = n$.
Induktionsschritt: Aus $n - 1 = n$ folgt $n = n + 1$ und daher $1 = 2 = \cdots = n = n + 1$.

5) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Je n beliebige Punkte in einer Ebene liegen stets auf einer Gerade.
Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion.
Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 1$ und $n = 2$ offensichtlich korrekt.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für n Punkte schon gezeigt.
Induktionsschritt: Gegeben seien die $n + 1$ Punkte $P_1, \ldots, P_{n+1}$ in der Ebene. Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ auf einer Gerade g. Ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_2, \ldots, P_{n+1}$ auf einer Gerade h. Da die beiden Punkte P_2 und P_n auf beiden Geraden g und h liegen, muss $g = h$ gelten und daher liegen $P_1, \ldots, P_{n+1}$ alle auf einer Gerade.

6) Mit $A(n)$ werde die Aussage $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $A(n + 1)$ aus $A(n)$ folgt. Ist die Aussage $A(n)$ wahr?

7) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Die größte natürliche Zahl N ist 1.
Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen $N \neq 1$. Da $0 < 1$ ist $N \neq 0$ und daher $N > 1$. Daraus folgt $N^2 > N$, was der Definition von N widerspricht.

8) Es sei $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ wobei $a \neq 0\}$. Bildet G mit $\circ$ (d.h. der Komposition von Funktionen) eine Gruppe? Wenn ja, ist diese abelsch?

9) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn für alle $a, b \in G$ die Gleichung $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ gilt.

10) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn für alle $a, b \in G$ die Gleichung $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ gilt.

11) Es seien $(G, \bullet)$ und $(H, \star)$ zwei Gruppen. Beweisen Sie:

a) $G \times H$ bildet mit der Verknüpfung $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 \bullet b_1, a_2 \star b_2)$ eine Gruppe.
b) Die Gruppe $(G \times H, \circ)$ ist genau dann abelsch, wenn die Gruppen $(G, \bullet)$ und $(H, \star)$ beide abelsch sind.

Kann man diese Aussagen auf n Gruppen $(G_1, \bullet_1), \ldots, (G_n, \bullet_n)$ verallgemeinern?

12) Ist $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ ein Ring? Dabei bezeichne $+$ die komponentenweise Addition und $\times$ das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn es sich dabei nicht um einen Ring handeln sollte, beweisen Sie die erfüllten Voraussetzungen und geben Sie Gegenbeispiele für die nicht erfüllten Voraussetzungen an.

13) Ist die Menge $\{0, 1\}$ mit der Addition $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ und $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ und der Multiplikation $x \cdot y = 0$ (für $x, y \in \{0, 1\}$ beliebig) ein Ring? Wenn ja, besitzt er ein Einselement bzw. ist er kommutativ?

14) Ist die Menge $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ aller geraden ganzen Zahlen mit der üblichen Addition und Mulitiplikation ganzer Zahlen ein Ring? Wenn ja, besitzt er ein Einselement bzw. ist er kommutativ?

15) Ist die Menge $\mathcal{P} = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist eine Polynomfunktion}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation von (Polyom)Funktionen ein Ring? Wenn ja, besitzt er ein Einselement bzw. ist er kommutativ?

16) Wir versehen die Menge

$$\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f \mid f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ ist Funktion}\}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation von Funktionen, d.h. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ für $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x \in [0, 1]$. Handelt es sich dabei um einen Ring? Wenn ja, besitzt er ein Einselement bzw. ist er kommutativ?

17) Bestimmen Sie für die Beispiele 11) bis 16) die Einheitengruppen, sofern es sich dabei um Ringe mit Einselement handelt.

18) Berechnen Sie alle Produkte der folgenden drei Matrizen A, B und C (mit reellen Eintragungen), die man bilden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

19) Überprüfen Sie durch direktes Nachrechnen, dass $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$ gilt (wobei die Matrizen A und B reelle Eintragungen haben sollen):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

20) Es sei K ein Körper. Beweisen Sie: Sind $A, B \in K^{m \times n}$ und $C \in K^{n \times \ell}$, so gilt

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

21) Es sei K ein Körper und $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie: Wenn $ad - bc \neq 0$, ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$$

invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

22) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie: Wenn $A \in K^{n \times n}$ die Eigenschaft besitzt, dass ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A^{r+1} = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet), dann ist $I_n - A$ invertierbar und es gilt $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^r$.

23) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{M}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Dabei bezeichne $\cdot$ die Multiplikation von Matrizen und

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist diese Gruppe abelsch?

24) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{C}, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

sei und $\cdot$ die Matrizenmultiplikation bezeichne. Ist diese Gruppe abelsch?

25) Es sei K ein Körper und

$$\mathcal{D}_n = \left\{ A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n} \,\middle|\, a_{ii} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \right\},$$

d.h. die Menge aller $n \times n$ – Diagonalmatrizen mit Eintragungen aus K, in deren Diagonale nur Eintragungen $\neq 0$ stehen. Beweisen Sie, dass $(\mathcal{D}_n, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei $\cdot$ die Matrizenmultiplikation bezeichnet. Für welche n ist diese Gruppe abelsch?

Definition: Es sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$. Als Spur von A bezeichnet man

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in K.$$

26) Es sei K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$,
b) Wenn B invertierbar ist, gilt $\operatorname{Spur}(BAB^{-1}) = \operatorname{Spur} A$.

27) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ ist nicht kommutativ wenn $n \geq 2$. *Hinweis.* Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, dass für jeden Körper K funktioniert, finden Sie zunächst eines für $n = 2$, in dem nur die Körperelemente 0 und 1 auftreten. Erweitern Sie dieses geeignet, um ein Gegenbeispiel zu finden, dass für $n > 2$ verwendet werden kann.

Definition: Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) wenn $A^{\mathrm{T}} = A$ (bzw. $A^{\mathrm{T}} = -A$) gilt.

28) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beweisen Sie:

a) Wenn $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$ schiefsymmetrisch ist gilt $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$,
b) Ist $A \in K^{n \times n}$ sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch, so ist $A = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet),
c) Summen, Differenzen und skalare Vielfache von symmetrischen (bzw. schiefsymmetrischen) Matrizen sind wieder symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch).

29) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beweisen Sie: Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ lässt sich auf eindeutige Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix schreiben.

30) Es sei K ein Körper, $\alpha \in K$ und $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie

$$(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B).$$

31) Beweisen Sie: Die Menge $\mathcal{F} = \left\{(a_n)_{n\geq 1} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^+\right\}$ aller reeller Folgen ist mit den Verknüpfungen

$$(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} := (a_n + b_n)_{n\geq 1} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (a_n)_{n\geq 1} := (\alpha a_n)_{n\geq 1}$$

ein reeller Vektorraum.

32) Es sei $I(\subseteq \mathbb{R})$ ein Intervall positiver Länge und $\mathbb{R}^I$ die Menge aller Abbildungen $f : I \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^I$ ein reeller Vektorraum ist, wobei Summe $f + g$ und skalares Vielfache $\alpha \cdot f$ (mit $f, g \in \mathbb{R}^I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$) durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ bzw. } (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ für } x \in I$$

festgelegt sind.

33) Es sei $V = (0, +\infty)$, d.h. V ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Für $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $v \oplus w$ und $\alpha \odot v$ durch $v \oplus w := v \cdot w$ und $\alpha \odot v := v^\alpha$ definiert. Beweisen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist.

34) Es sei $M \neq \varnothing$ eine Menge und K ein Körper. Beweisen Sie, dass die Menge K^M aller Abbildungen $f : M \to K$ mit den Verknüpfungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ und } (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ für } x \in M \text{ und } \alpha \in K$$

ein K-Vektorraum ist. Welche der bisherigen Beispiele von Vektorräumen kann man als Spezialfall dieses Vektorraums auffassen?

35) Welches der folgenden Beispiele ist ein Vektorraum (jeweils mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren)? Geben Sie jeweils an, welche der Vektorraumaxiome erfüllt bzw. verletzt sind.

a) $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z}^n$ über $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{C}$

36) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ (mit $n \geq 2$)?

a) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 \geq 0\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 x_2 = 0\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{Q}\right\}$

37) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des reellen Vektorraums

$$\mathcal{P} = \{p \mid p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist Polynomfunktion}\}?$$

a) $\{p \in \mathcal{P} \mid p(1) = 0\}$ b) $\{p \in \mathcal{P} \mid p(1) = 1\}$ c) $\{p \in \mathcal{P} \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : p(\alpha) = 0\}$

38) Beweisen Sie, dass sowohl die symmetrischen als auch die schiefsymmetrische Matrizen einen Teilraum des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^{n\times n}$ bilden und bestimmen Sie den Schnitt dieser beiden Teilräume.

39) Ist $\mathbb{Q}^n$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$?

40) Es sei V ein K-Vektorraum und U, W zwei Teilräume von V. Beweisen Sie, dass $U \cup W$ genau dann ein Teilraum von V ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

41) Finden Sie den Schnitt der folgenden beiden Teilräume U und W des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x - y + z = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, 2x + y - z = 0 \right\}.$$

42) Es sei V ein K-Vektorraum und U und W Teilräume von V. Beweisen Sie, dass

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

ebenfalls ein Teilraum von V ist.

43) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Beweisen Sie, dass dann auch $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

44) Es sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ alles Basen von V sind, wobei

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

45) Es sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind linear unabhängig bzw. Basen von V? Begründen Sie Ihre Behauptungen.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

46) Es bezeichne V den reellen Vektorraum $\mathcal{P}_3$. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig bzw. Basen von V? Begründen Sie Ihre Behauptungen.

a) $\{p_1, p_2, p_3\}$ wobei $p_1(x) = x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$ und $p_3(x) = x^3 - x^2$,

b) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ wobei $p_1(x) = 2x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^3 - x$ und $p_4(x) = x^2 + 1$.

47) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ an (und beweisen Sie, dass es wirklich eine Basis ist). Was ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$?

48) Es sei V der reelle Vektorraum $V = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$. Geben Sie eine Basis für V an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} V$.

49) Es sei V der reelle Vektorraum $V = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist schiefsymmetrisch}\}$. Geben Sie eine Basis für V an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} V$.

50) Es sei $V = \left\{x + \sqrt{2} \cdot y \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q}\right\}$. Beweisen Sie, dass V (mit der üblichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen) ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist. Geben Sie dafür eine Basis an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} V$.