Übungen zu Algebraische Strukturen, WS 2014/15

Christoph Baxa

1) Es sei $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ wobei $a \neq 0\}$. Bildet G mit $\circ$ (d.h. der Komposition von Funktionen) eine Gruppe? Wenn ja, ist diese abelsch?

2) Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen mit der Matrizenmultiplikation Gruppen sind (wobei K einen Körper bezeichnet):

a) $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\} = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}$,
b) $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$,
c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$,
d) $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^t\}$.

3) Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und $S_X = \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$. Ist $X = \{1, \dots, n\}$, so schreibt man S_n statt $S_{\{1,\dots,n\}}$.

a) Zeigen Sie, dass $(S_X, \circ)$ eine Gruppe ist.
b) Zeigen Sie $|S_n| = n!$.
c) Für welche n ist S_n abelsch? Begründen Sie Ihre Behauptung.

4) Beweisen Sie: Ist G eine abelsche Gruppe, $a_1, \dots, a_n \in G$ und $\sigma \in S_n$, so gilt

$$a_1 \cdots a_n = a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}.$$

5) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) Erfüllt $a \in G$ die Beziehung $a \cdot a = a$, so ist $a = e$.
b) Für $a, b \in G$ existieren eindeutig bestimmte $x, y \in G$, derart dass $ax = b$ und $ya = b$.

6) Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) $\forall\, a, b, c \in G : \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
b) $\exists\, e \in G \ \ \forall\, a \in G : \ e \cdot a = a$ (d.h. e ist linksneutrales Element),
c) $\forall\, a \in G \ \ \exists\, a^{-1} \in G : a^{-1} \cdot a = e$ (d.h. a^{-1} ist linksinverses Element).

7) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie: Gilt $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist abelsch. Welche Gruppen mit dieser Eigenschaft kennen Sie? Gilt die Umkehrung?

8) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) G ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$ gilt.
b) G ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ für alle $a, b \in G$ gilt.

9) Gegeben sei das Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 1), (1, -1), (-1, 1)$ und $(-1, -1)$ (im $\mathbb{R}^2$). Betrachten Sie die Menge $D_4^* = \{I, R, R^2, R^3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ von Bijektionen des Quadrats. Dabei bezeichne I die Identität, R die Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung, S_0 die Spiegelung an der Gerade $y = x$, S_1 die Spiegelung an der y-Achse, S_2 die Spiegelung an der Gerade $y = -x$ und S_3 die Spiegelung an der x-Achse.

a) Schreiben Sie eine Verknüpfungstafel von D_4^*.
b) Beweisen Sie, dass D_4^*, versehen mit der Verknüpfung von Abbildungen, eine nicht-abelsche Gruppe bildet (die Symmetriegruppe des Quadrats).

10) Es seien $G_1, \dots, G_n$ Gruppen. Beweisen Sie, dass $G_1 \times \dots \times G_n$ mit der Verknüpfung $(a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) = (a_1b_1, \dots, a_nb_n)$ eine Gruppe ist. Wann ist $G_1 \times \dots \times G_n$ abelsch?

11) a) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/p^n \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
b) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
c) Beweisen Sie, dass $\big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\big\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{1, -1\}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (mit der Matrizenmultiplikation) ist.

12) Schreiben Sie eine Verknüpfungstafel der *Kleinschen Vierergruppe* $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und finden Sie alle Untergruppen von V_4.

13) Es sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ sei endlich. Beweisen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn $ab \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

14) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{32}^*$ von den Restklassen von 5 und -1 erzeugt wird.

15) Beweisen Sie, dass die Gruppe D_4^* (aus Beispiel 9) von R und S_0 erzeugt wird. Zeigen Sie zu diesem Zweck

$$D_4^* = \big\{R^j S_0^i \mid i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 1, 2, 3\}\big\}.$$

16) Es bezeichne, analog zu Beispiel 9, D_3^* die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Finden Sie die Elemente von D_3^* und beweisen Sie analoge Eigenschaften wie in den Beispielen 9 und 15. Kennen Sie eine Gruppe, deren Strukur der von D_3^* gleicht?

17) Die *Quaternionengruppe* $Q_8 := \langle A, B\rangle$ sei die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie $A^2 = B^2 = -I_2$ und folgern Sie $A^2B^2 = A^4 = B^4 = I_2$, wobei I_2 die $2{\times}2$-Einheitsmatrix bezeichnet,

b) Zeigen Sie $BA = A^3B$ und folgern Sie $Q_8 = \big\{A^iB^j \bigm| i \in \{0,1,2,3\}, j \in \{0,1\}\big\}$,

c) Zeigen Sie, dass Q_8 eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8 ist.

18) Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente der Gruppen a) $\mathbb{Z}_{12}$ b) $\mathbb{Z}_{12}^*$ c) S_3.

19) Es sei G eine Gruppe und $a, b \in G$. Beweisen Sie

a) $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$, b) $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$, c) $\mathrm{ord}(bab^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$.

20) a) Es sei G eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass $H := \{a \in G \mid \mathrm{ord}(a) \text{ ist endlich}\}$ eine Untergruppe von G ist.
b) Wie sieht diese Untergruppe H aus, wenn $G = \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1\big\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen ist?

21) a) Betrachten Sie die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ mit der Matrizenmultiplikation und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{ord}(A) = 4$ und $\mathrm{ord}(B) = 3$ gilt, aber AB unendliche Ordnung besitzt.
b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, die beide unendliche Ordnung besitzen, aber deren Summe $a + b$ endliche Ordnung hat.

22) a) Es sei G die Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$. Bestimmen Sie die Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich der Untergruppe $H = \{\overline{0}, \overline{4}\}$.
b) Es sei G die Gruppe $\{1, i, -1, -i\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen. Bestimmen Sie die Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich der Untergruppe $H = \{1, -1\}$.

23) Die Abbildungen $\sigma, \tau \in S_3$ seien gegeben durch $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ und $\sigma(3) = 1$ bzw. $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ und $\tau(3) = 3$. Betrachten Sie die Untergruppen $H = \{\varepsilon, \tau\}$ und $K = \{\varepsilon, \sigma, \sigma^2\}$ der Gruppe S_3 (wobei ε das neutrale Element von S_3 bezeichnen soll). Bestimmen Sie die Zerlegung von S_3 in Links- bzw. Rechtsnebenklassen nach H und K.

24) Es sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Beweisen Sie, dass sowohl die Links- als auch die Rechtsnebenklasse bezüglich der Untergruppe $\mathrm{SL}_n(K)$, in der A liegt, die Menge $\{B \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det B = \det A\}$ ist.

25) Welche der Untergruppen aus den Beispielen 22, 23 und 24 sind Normalteiler? Begründen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe der Resultate aus diesen Beispielen.

26) Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$ habe die Eigenschaft $[G : H] = 2$. Zeigen Sie $H \trianglelefteq G$.

27) Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen Homomorphismen $\varphi : G \to H$ sind und bestimmen Sie, welche davon Monomorphismen, Epimorphismen bzw. Isomorphismen sind:

a) Die Gruppen G und H seien $\big((0, +\infty), \cdot\big)$ und $(\mathbb{R}, +)$ und $\varphi(x) = \log x$.
b) Die Gruppen G und H seien $\big(M_n(K), +\big)$ und $(K, +)$ und $\varphi(A) = \mathrm{Spur}(A)$ (wobei K einen Körper bezeichnet).
c) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ und

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation und $\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

28) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ist genau dann ein Automorphismus wenn G abelsch ist,
b) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Endomorphismus wenn G abelsch ist.

29) Es seien G, H und K Gruppen und $\varphi : G \to H$ und $\psi : H \to K$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie:

a) Sind φ und ψ Homomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Homomorphismus.
b) Sind φ und ψ Monomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Monomorphismus.
c) Sind φ und ψ Epimorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Epimorphismus.
d) Sind φ und ψ Isomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Isomorphismus.

30) Es seien G und H zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:
a) Ist φ ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomorphismus.
b) Der Homomorphismus φ ist genau dann ein Isomorphismus wenn es einen Homomorphismus $\psi : H \to G$ mit den Eigenschaften $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_H$ gibt.

31) Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) Wenn $A \leq G$ dann $\varphi(A) \leq H$.
b) Wenn $B \leq H$ dann $\varphi^{-1}(B) \leq G$.
c) Ist $A \trianglelefteq G$ und φ surjektiv dann $\varphi(A) \trianglelefteq H$.
d) Ist $B \trianglelefteq H$ dann $\varphi^{-1}(B) \trianglelefteq G$.

32) Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) $\ker \varphi \trianglelefteq G$ und $\operatorname{Im} \varphi \leq H$.
b) $\operatorname{Im} \varphi$ muss kein Normalteiler von H sein.
c) φ ist genau dann ein Monomorphismus wenn $\ker \varphi = \{e\}$.

33) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) $Z(G) \trianglelefteq G$,
b) $\big(\mathrm{Aut}(G), \circ\big)$ ist eine Gruppe,
c) $\mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$,
d) $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

Hinweis. Es sei $a \in G$ und $\varphi_a \in \mathrm{Inn}(G)$ bezeichne $\varphi_a : G \to G$, $\varphi_a(x) = axa^{-1}$. Zeigen Sie für Teil c) die Identitäten $\varphi_b \circ \varphi_a = \varphi_{ba}$, $\varphi_a^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$ und $\psi \circ \varphi_a \circ \psi^{-1} = \varphi_{\psi(a)}$, wobei $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ sein soll. Betrachten Sie für Teil d) die Abbildung $G \to \mathrm{Inn}(G)$, $a \mapsto \varphi_a$.

34) Es seien $G_1, \dots, G_k$ Gruppen und $N_i \trianglelefteq G_i$ für $1 \leq i \leq k$. Beweisen Sie, dass $N_1 \times \cdots \times N_k \trianglelefteq G_1 \times \cdots \times G_k$ und dass

$$(G_1 \times \cdots \times G_k)/(N_1 \times \cdots \times N_k) \cong (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_k/N_k).$$

Hinweis. Betrachten Sie die Abbildung $G_1 \times \cdots \times G_k \to (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_k/N_k)$, $(a_1, \dots, a_k) \mapsto (a_1N_1, \dots, a_kN_k)$.

35) a) Es sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Beweisen Sie $aHa^{-1} \leq G$ und $aHa^{-1} \cong H$ für alle $a \in G$.
b) Es sei G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ mit Ordnung $n = |H|$. Beweisen Sie, dass $H \trianglelefteq G$, wenn H die einzige Untergruppe der Ordnung n von G ist.

36) Beweisen Sie: Ist p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p$, so ist G eine zyklische Gruppe (und daher isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_p$).

37) a) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 4 zu $\mathbb{Z}_4$ oder $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorph ist.
b) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung ≤ 5 abelsch ist.

38) a) Finden Sie alle Elemente der Gruppe Q_8, die Ordnung 2 besitzen.
b) Beweisen Sie, dass jede Untergruppe der Gruppe Q_8 Normalteiler von Q_8 ist.
c) Bestimmen Sie (die Struktur von) Q_8/N für alle $N \trianglelefteq Q_8$ (d.h. geben Sie eine bekannte Gruppe G mit der Eigenschaft $Q_8/N \cong G$ an).

Hinweis. Beachten Sie, dass in b) und c) nicht verlangt wird, dass Sie alle Untergruppen der Q_8 bestimmen.

Bemerkung. Nichtabelsche Gruppen mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Untergruppen bereits Normalteiler ist, werden als Hamiltonsche Gruppen bezeichnet.

39) Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus S_9 als Produkt elementfremder Zyklen und bestimmen Sie ihr Signum.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (4\,5\,6) \circ (5\,6\,7) \circ (6\,7\,1) \circ (1\,2\,3) \circ (2\,3\,4) \circ (3\,4\,5)$$

$$\text{d) } (1\,4\,7\,6\,2) \circ (2\,4\,3) \circ (4\,5\,8\,1)$$

40) Es sei $(i_1 \ldots i_r) \in S_n$ ein Zyklus und $\sigma \in S_n$ beliebig. Beweisen Sie, dass

$$\sigma \circ (i_1 \ldots i_r) \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1) \ldots \sigma(i_r)\big).$$

41) Zeigen Sie, dass $S_n = \big\langle (1\,2), (1\,2 \ldots n) \big\rangle$ für alle $n \geq 3$.

42) Es sei $n \geq 3$ und $\alpha = (1\,2 \ldots n) \in D_n$ wie in Satz 45. Beweisen Sie, dass $\langle \alpha \rangle \trianglelefteq D_n$ und bestimmen Sie (die Struktur von) $D_n/\langle \alpha \rangle$.

43) Es sei R ein Ring. Beweisen Sie:
a) $(-a)(-b) = ab$ für alle $a, b \in R$,
b) $a(b-c) = ab - ac$ und $(a-b)c = ac - bc$ für alle $a, b, c \in R$,
c) $(na)b = a(nb) = n(ab)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $a, b \in R$,
d) für alle $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in R$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

44) Es sei R ein Ring, $a, b \in R$ mit $ab = ba$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Beweisen Sie den *binomischen Lehrsatz*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

45) Es sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei (d.h. es gibt keine Primzahl p mit der Eigenschaft $p^2 \mid d$). Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

46) Es sei R ein Ring mit 1 mit der Eigenschaft, dass $0 = 1$. Zeigen Sie, dass $R = \{0\}$.

47) a) Zeigen Sie $\mathbb{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}$. Was ist die Struktur der Gruppe $\big(\mathbb{Z}[i]^*, \cdot\big)$?
b) Zeigen Sie, dass $\pm(1+\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
c) Man kann zeigen, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^* = \big\{\pm(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\big\}$. Folgern Sie (unter Verwendung dieser unbewiesenen Tatsache) $\big(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*, \cdot\big) \cong \big(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}, +\big)$.

48) Es sei

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{H}$, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen, einen Schiefkörper, aber keinen Körper bildet.

49) Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ überabzählbar unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$ besitzt.

50) Es sei V der (reelle) Vektorraum der reellen Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ (mit den Verknüpfungen $(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} := (a_n + b_n)_{n\geq 1}$ und $\alpha \cdot (a_n)_{n\geq 1} := (\alpha a_n)_{n\geq 1}$) und R der Endomorphismenring von V. Es bezeichnen $\varphi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ die Abbildungen

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots) \quad \text{und} \quad \psi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) φ und ψ sind Elemente von R (d.h. $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen),
b) φ besitzt in R ein linksinverses, aber kein rechtsinverses Element,
c) ψ besitzt in R ein rechtsinverses, aber kein linksinverses Element,
d) φ ist ein Rechtsnullteiler aber kein Linksnullteiler in R,
e) ψ ist ein Linksnullteiler aber kein Rechtsnullteiler in R.

51) a) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/p^n \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ ein Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist. Ist es auch ein Ideal?
b) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ ein Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist. Ist es auch ein Ideal?

52) a) Es sei R ein Ring und $a \in R$. Beweisen Sie, dass $\{x \in R \mid xa = 0\}$ ein Linksideal und $\{x \in R \mid ax = 0\}$ ein Rechtsideal von R ist.
b) Bestimmen Sie die in a) beschriebenen Links- bzw. Rechtsideale für alle $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{12}$.
c) Bestimmen Sie in a) beschriebenen Links- bzw. Rechtsideale für $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$.

53) Es seien $R_1, \dots, R_n$ Ringe. Beweisen Sie:

a) Definiert man auf $R_1 \times \cdots \times R_n$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$
$$\text{und} \quad (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n),$$

so wird $R_1 \times \cdots \times R_n$ dadurch zu einem Ring.
b) Sind $R_1, \dots, R_n$ alles Ringe mit 1, so ist auch $R_1 \times \cdots \times R_n$ ein Ring mit 1.
c) Sind $R_1, \dots, R_n$ alle kommutativ, so ist auch $R_1 \times \cdots \times R_n$ kommutativ.
d) Sind $R_1, \dots, R_n$ alles Ringe mit 1, so gilt $(R_1 \times \cdots \times R_n)^* = R_1^* \times \cdots \times R_n^*$.
e) Ist I_i ein Linksideal (bzw. Rechtsideal bzw. Ideal) von R_i für $1 \le i \le n$, so ist $I_1 \times \cdots \times I_n$ ein Linksideal (bzw. Rechtsideal bzw. Ideal) von $R_1 \times \cdots \times R_n$.

54) Es sei K ein Körper und $1 \le k \le n$.

a) Es sei $I_k := \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } j \ne k\}$, d.h. die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Eintragungen aus K, bei denen höchstens in der k-ten Spalte Eintragungen $\ne 0$ stehen. Beweisen Sie, dass I_k ein Linksideal (aber für $n \ge 2$ kein Rechtsideal) von $M_n(K)$ ist.

b) Es sei $J_k := \{(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \ne k\}$, d.h. die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Eintragungen aus K, bei denen höchstens in der k-ten Zeile Eintragungen $\ne 0$ stehen. Beweisen Sie, dass J_k ein Rechtsideal (aber für $n \ge 2$ kein Linksideal) von $M_n(K)$ ist.

55) Es sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass $M_n(K)$ nur die Ideale $\{0\}$ und $M_n(K)$ besitzt. (*Hinweis.* Es bezeichne E_{ij} jene Matrix in $M_n(K)$, die in der i-ten Zeile und j-ten Spalte die Eintragung 1 besitzt und sonst immer nur 0 als Eintragung. Ist $I \ne \{0\}$ ein Ideal von $M_n(K)$, so gibt es $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in I \setminus \{0\}$. Daher gibt es $k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ mit der Eigenschaft $a_{k\ell} \ne 0$. Zeigen Sie für $1 \le t \le n$, dass $E_{tk} \cdot A \cdot E_{\ell t} = a_{k\ell} E_{tt}$. Folgern Sie daraus $a_{k\ell} E_{tt} \in I$, $a_{k\ell} E_{tt} \cdot a_{k\ell}^{-1} E_{tt} = E_{tt} \in I$ und $I_n = E_{11} + \cdots + E_{nn} \in I$.) Warum folgt aus diesem Beispiel und Satz 58 (iii) für $n \ge 2$ nicht, dass $M_n(K)$ ein Schiefkörper ist?

56) Es sei R ein Ring und $X \subseteq R$. Beweisen Sie

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{I} \alpha_i x_i \beta_i + \sum_{j=1}^{J} \gamma_j y_j + \sum_{k=1}^{K} u_k \delta_k + \sum_{\ell=1}^{L} n_\ell v_\ell \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i \in R \text{ und } x_i \in X \text{ für } 1 \le i \le I, \\ \gamma_j \in R \text{ und } y_j \in X \text{ für } 1 \le j \le J, \\ \delta_k \in R \text{ und } u_k \in X \text{ für } 1 \le k \le K, \\ n_\ell \in \mathbb{Z} \text{ und } v_\ell \in X \text{ für } 1 \le \ell \le L \end{array} \right\}.$$

57) a) Es sei R ein kommutativer Ring und $X \subseteq R$. Beweisen Sie

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{I} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{J} n_j y_j \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i \in R \text{ und } x_i \in X \text{ für } 1 \le i \le I, \\ n_j \in \mathbb{Z} \text{ und } y_j \in X \text{ für } 1 \le j \le J \end{array} \right\}.$$

b) Es sei R ein Ring mit 1 und $X \subseteq R$. Beweisen Sie

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \beta_i \;\middle|\; \alpha_i, \beta_i \in R \text{ und } x_i \in X \text{ für } 1 \le i \le n \right\}.$$

c) Es sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $X \subseteq R$. Beweisen Sie

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \in R \text{ und } x_i \in X \text{ für } 1 \le i \le n \right\}.$$

Definition. Es sei R ein Ring und I und J Ideale von R. Das Produkt $I \cdot J$ der Ideale I und J ist definiert als $I \cdot J := \{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \mid n \ge 0, x_1, \ldots, x_n \in I, y_1, \ldots, y_n \in J\}$.

58) Es sei R ein Ring und I und J Ideale von R. Beweisen Sie:

a) $I \cdot J$ ist ein Ideal von R.
b) $I \cdot J$ ist das von der Menge $\{xy \mid x \in I, y \in J\}$ erzeugte Ideal von R.
c) Ist R ein kommutativer Ring mit 1 und sind $a, b \in R$, so gilt $(a) \cdot (b) = (ab)$.

59) Es sei R ein Ring und I und J Ideale von R. Beweisen Sie:

a) $I \cdot J \subseteq I \cap J$,
b) Ist R kommutativ, so gilt $I \cdot J = J \cdot I$,
c) Ist R ein Ring mit 1, so gilt $R \cdot I = I \cdot R = I$.

60) Es sei R ein Ring. Beweisen Sie:

a) $I \cdot (J_1 + J_2) = I \cdot J_1 + I \cdot J_2$ für alle Ideale I, J_1, J_2 von R,
b) $(I_1 + I_2) \cdot J = I_1 \cdot J + I_2 \cdot J$ für alle Ideale I_1, I_2, J von R,
c) Für alle Ideale I_1, I_2, I_3 von R gilt

$$\begin{aligned}(I_1 \cdot I_2) \cdot I_3 &= I_1 \cdot (I_2 \cdot I_3) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \;\middle|\; n \geq 0, x_1, \ldots, x_n \in I_1, y_1, \ldots, y_n \in I_2, z_1, \ldots, z_n \in I_3 \right\}.\end{aligned}$$

Definition. Es sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $a^n = 0$ gibt. Die Menge aller nilpotenter Elemente des Rings R bezeichnen wir mit $\mathrm{Nil}(R)$.

61) Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring mit 1. Beweisen Sie:

a) Ist $a \in \mathrm{Nil}(R)$, so ist a ein Nullteiler.
b) Wenn $a, b \in \mathrm{Nil}(R)$, so ist $a + b \in \mathrm{Nil}(R)$.
c) $\mathrm{Nil}(R)$ ist ein Ideal von R.
d) Ist $u \in R^*$ und $a \in \mathrm{Nil}(R)$, so ist $u + a \in R^*$ (*Hinweis.* Geometrische Reihe).

62) Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen Ringisomorphismen sind:

a) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\varphi(z) = \overline{z}$,
b) $\varphi : \mathbb{C} \to \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $\varphi(a + bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix} \right)$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$),
c) Es sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei und $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ sowie $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $\varphi(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}$ (wobei $a, b \in \mathbb{Z}$),

63) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ als abelsche Gruppen aber nicht als Ringe isomorph sind.

64) Es sei $R (\neq \{0\})$ ein kommutativer Ring mit 1. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) R ist ein Körper,
(ii) Ist S ein Ring und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, so ist φ die Nullabbildung oder injektiv.

65) Es sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ein Ringhomomorphismus. Beweisen Sie, dass φ die Nullabbildung (d.h. $\varphi(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$) oder die Identität (d.h. $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$) ist. Warum darf man daraus nicht (mit Hilfe von Bsp. 64) folgern, dass $\mathbb{Z}$ ein Körper ist?