Übungen Lineare Algebra und Geometrie 2, WS 2009/10

Christoph Baxa

166) Für $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ bezeichne $A^* = \overline{A}^t$, d.h. die transponierte, komplex konjugierte Matrix zu A. Beweisen Sie:

a) $(A+B)^* = A^* + B^*$ b) $(cA)^* = \overline{c}A^*$ (mit $c \in \mathbb{C}$)

c) $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$ d) $(A^*)^* = A$

167) Es sei $\sigma \in S_n$ und die lineare Abbildung $\varphi_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei gegeben durch

$$\varphi_\sigma((x_1, \dots, x_n)^t) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})^t.$$

Weiters sei $M_\sigma := [\varphi_\sigma]_{B,B} \in M_n(\mathbb{R})$ wobei B die Standardbasis bezeichnet. Beweisen Sie, daß φ_σ bzw. M_σ orthogonal sind und zeigen Sie $\det M_\sigma = \operatorname{sgn} \sigma$.

168) Es sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $\varphi : V \to V$ selbstadjungiert. Es sei $\psi : V \to V$ gegeben durch $\psi(v) = v + i\varphi(v)$. Beweisen Sie, daß ψ invertierbar ist. (Hinweis: Zeigen Sie $\|\psi(v)\| > 0$ für alle $v \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$.)

169) Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum, U ein Teilraum von V und π die orthogonale Projektion von V in U. (D.h. π ist die folgende lineare Abbildung: Da $V = U \oplus U^\perp$ gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $u \in U$ und $w \in U^\perp$, derart daß $v = u + w$. Es sei nun $\pi(v) = u$.) Beweisen Sie, daß π selbstadjungiert ist. Ist π orthogonal bzw. unitär? Ist π normal?

170) Welche der folgenden Matrizen mit Eintragungen aus $\mathbb{C}$ ist Hermitesch, schief-Hermitesch bzw. normal?

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 5 \\ -1+i & 2i & i \\ 5 & i & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & i & 2+i \\ -i & 3 & 3i \\ 2-i & -3i & 0 \end{pmatrix}$$

171) Stellen Sie die folgenden Matrizen (auf eindeutige Weise) als Summe einer symmetrischen bzw. Hermiteschen und einer schiefsymmetrischen bzw. schief-Hermiteschen Matrix dar:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} -1+i & 1 & 0 \\ 2i & 1 & 1+i \\ -3-i & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

172) Es sei V ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ besitze eine adjungierte Abbildung φ^*. Beweisen Sie: Gilt $\|\varphi^*(v)\| = \|\varphi(v)\|$ für alle $v \in V$, so ist φ normal.

173) Beweisen Sie Satz 12.20 aus der Vorlesung: Es sei V ein reeller Vektorraum. Versieht man $\widehat{V} = V \times V$ mit den beiden Verknüpfungen

$$\widehat{V} \times \widehat{V} \to \widehat{V}, \quad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

und

$$\mathbb{C} \times \widehat{V} \to \widehat{V}, \quad (a + ib) \cdot (v, w) := (av - bw, aw + bv)$$

so wird $\widehat{V}$ dadurch zu einem komplexen Vektorraum, der *komplexen Erweiterung von V.*

174) Beweisen Sie Satz 12.24 aus der Vorlesung: Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann läßt sich dieses innere Produkt durch

$$\langle v_1 + iw_1, v_2 + iw_2\rangle := \langle v_1, v_2\rangle + i\langle w_1, v_2\rangle - i\langle v_1, w_2\rangle + \langle w_1, w_2\rangle$$

(mit $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$) auf eindeutige Weise zu einem (komplexen) inneren Produkt auf $\widehat{V}$ fortsetzen.

175) Beweisen Sie für die folgenden Matrizen mit reellen bzw. komplexen Eintragungen, daß sie diagonalisierbar sind und bestimmen Sie dazu ähnliche Diagonalmatrizen sowie orthogonale bzw. unitäre Transformationsmatrizen, die die Diagonalisierung bewirken:

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

176) Es bezeichne F_n die n-te Fibonacci-Zahl, d.h. $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 1$. Beweisen Sie die sogenannte *Formel von Binet,* d.h. die Beziehung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \quad (\text{für } n \geq 0).$$

Verwenden Sie dabei *nicht* Induktion, sondern die Beziehung

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{für } n \geq 1)$$

als Ausgangspunkt. Diagonalisieren Sie die darin auftretende symmetrische Matrix.

177) Bestimmen Sie eine Polar- und eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

178) Es sei V ein K-Vektorraum und $L(V,V;K) := \{\sigma : V \times V \to K \mid \sigma \text{ ist Bilinearform}\}$. Beweisen Sie:

a) Führt man auf $L(V,V;K)$ die folgenden beiden Verknüpfungen

$$(\sigma + \tau)(v,w) := \sigma(v,w) + \tau(v,w) \quad \text{und} \quad (\alpha\sigma)(v,w) := \alpha\sigma(v,w)$$

(mit $\sigma, \tau \in L(V,V;K)$, $v, w \in V$ und $\alpha \in K$) ein, so wird $L(V,V;K)$ dadurch zu einem K-Vektorraum.

b) Die symmetrischen Bilinearformen auf V bilden einen Teilraum von $L(V,V;K)$.

179) Es sei V ein K-Vektorraum und B eine Basis von V. Beweisen Sie: Die Werte einer Bilinearform σ auf K sind durch die Familie $\big(\sigma(v,w)\big)_{(v,w)\in B\times B}$ eindeutig bestimmt. D.h. zu jeder Familie $(\alpha_{v,w})_{(v,w)\in B\times B}$ (mit $\alpha_{v,w} \in K$ für alle $(v,w) \in B \times B$) gibt es genau eine Bilinearform σ auf V, die $\sigma(v,w) = \alpha_{v,w}\ \forall\,(v,w) \in B \times B$ erfüllt.

180) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie

$$\dim_K L(V,V;K) = (\dim_K V)^2$$

indem Sie eine Basis von $L(V,V;K)$ angeben.

181) Es sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie: Erfüllt eine Abbildung $\sigma : V \times V \to K$ die folgenden drei Bedingungen, so ist σ eine symmetrische Bilinearform:

(1) $\quad \sigma(u+v,w) = \sigma(u,w) + \sigma(v,w) \quad \forall\, u,v,w \in V$

(2) $\quad \sigma(\alpha v,w) = \alpha\sigma(v,w) \quad \forall\,\alpha \in K\ \ \forall\, v,w \in V$

(3) $\quad \sigma(v,w) = \sigma(w,v) \quad \forall\, v,w \in V$

182) Beweisen Sie: Die Abbildung $\sigma : M_n(K) \times M_n(K) \to K$, $\sigma(X,Y) = \mathrm{Spur}(X \cdot A \cdot Y)$ (mit fest gewähltem $A \in M_n(K)$) ist eine Bilinearform.

183) Beweisen Sie, daß die folgenden Abbildungen symmetrische Bilinearformen sind:

a) $\sigma : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_k \to \mathbb{R}$, $\sigma\big((a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 1}\big) = \lim\limits_{k\to\infty} a_k b_k$

b) $\sigma : P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\sigma(p,q) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0) \cdot q^{(k)}(0) = p(0) \cdot q(0) + p'(0) \cdot q'(0) + p''(0) \cdot q''(0) + \cdots$$

184) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis B und $\dim_K V = n$. Beweisen Sie, daß die Abbildung $L(V,V;K) \to M_n(K)$, $\sigma \mapsto [\sigma]_B$, die jeder Bilinearform auf V ihre darstellende Matrix bezüglich B zuordnet, ein Isomorphismus ist.

Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform $\sigma : V \times V \to K$ heißt schiefsymmetrisch, wenn $\sigma(v,w) = -\sigma(w,v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.

185) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis B und $\sigma : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Beweisen Sie, daß σ genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn $[\sigma]_B$ schiefsymmetrisch ist (d.h. wenn $[\sigma]_B^t = -[\sigma]_B$ gilt).

186) Es sei V ein K-Vektorraum, M eine Teilmenge von V und σ eine Bilinearform auf V. Beweisen Sie:

a) Sowohl das *orthogonale Rechts-Komplement*

$$M^\perp := \{w \in V \mid \sigma(v,w) = 0 \text{ für alle } v \in M\}$$

von M bezüglich σ als auch das *orthogonale Links-Komplement*

$$^\perp M := \{v \in V \mid \sigma(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in M\}$$

von M bezüglich σ sind Teilräume von V.

b) Ist σ symmetrisch, so gilt $M^\perp = {}^\perp M$.

c) Es gelten $[M]^\perp = M^\perp$ und ${}^\perp[M] = {}^\perp M$.

d) Zeigen Sie anhand des Beispiels

$$V = \mathbb{R}^2,\ M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \sigma(x,y) = x_1 y_1 + x_1 y_2$$

(mit $x = (x_1, x_2)^t$, $y = (y_1, y_2)^t$), daß für nicht symmetrische Bilinearformen die Gleichung $M^\perp = {}^\perp M$ nicht gelten muß.

187) Es sei K ein Körper. Beweisen Sie, daß

$$\sigma : K^{2n} \times K^{2n} \to K, \quad \sigma(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i)$$

(mit $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})^t$, $y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n})^t$) eine schiefsymmetrische Bilinearform auf K^{2n} ist. Bestimmen Sie $[\sigma]_B$, wobei B die Standardbasis des K^{2n} bezeichnen soll.

188) Es sei V ein K-Vektorraum und σ eine Bilinearform auf V. Beweisen Sie:

a) Ist $\operatorname{char} K = 2$, so ist σ genau dann symmetrisch wenn es schiefsymmetrisch ist.

b) Ist $\operatorname{char} K \neq 2$, dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

(i) $\sigma(v,v) = 0$ für alle $v \in V$

(ii) σ ist schiefsymmetrisch

c) Ist $\operatorname{char} K = 2$, so gilt die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii), nicht aber die Umkehrung.

Hinweis: Betrachten Sie die Bilinearform σ auf $V = \mathbb{F}_2^2$, wobei

$$\sigma(x,y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad (\text{mit } x = (x_1, x_2)^t \text{ und } y = (y_1, y_2)^t).$$

189) Beweisen Sie die Teile (ii) – (v) von Korollar 13.10, d.h: Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ und $q : V \to \mathbb{R}$ quadratische Form mit Rang r und Positivitätsindex p. Dann gelten:

(ii) q ist positiv semidefinit $\iff p = r$

(iii) q ist negativ definit $\iff p = 0$ und $r = n$

(iv) q ist negativ semidefinit $\iff p = 0$

(v) q ist indefinit $\iff 0 < p < r$

190) Bestimmen Sie, ob die folgenden quadratischen Formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv bzw. negativ definit bzw. semidefinit oder indefinit sind (wobei $x = (x_1, x_2, x_3)^t$):

a) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

b) $q(x) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_3^2$

c) $q(x) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2$

d) $q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

e) $q(x) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

f) $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$

191) Es sei $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Wenn $b^2 - 4ac > 0$ ist q indefinit.

192) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R}) = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ symmetrisch.

a) Beweisen Sie: Wenn A positiv definit ist, gilt $a_{ii} > 0$ für $1 \le i \le n$. Gilt eine analoge Aussage für negativ definite Matrizen?

b) Wenn A positiv semidefinit ist, gilt $\alpha_i \ge 0$ für $1 \le i \le n$, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Hauptminoren von A bezeichnen. Gilt eine analoge Aussage für negativ semidefinite Matrizen?

c) Gelten in a) bzw. b) die Umkehrungen?

193) Finden Sie die Jordansche Normalform der beiden Matrizen A und B und finden Sie invertierbare Matrizen S und T, sodaß $S^{-1}AS$ bzw. $T^{-1}BT$ Jordansche Normalform besitzen.

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

194) Beweisen Sie, daß die Matrizen A_n mit $n \in \mathbb{N}$ alle zueinander ähnlich sind, wobei

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beweisen Sie, daß alle A_n die selbe Jordansche Normalform besitzen.

195) Beweisen Sie: Wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß die Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ die Gleichung $A^r = I_n$ erfüllt, dann ist A diagonalisierbar. (Hinweis: Beweisen Sie, daß die Jordansche Normalform J von A eine Diagonalmatrix sein muß, indem Sie $A = SJS^{-1}$ zur r-ten Potenz erheben.)

196) Das charakteristische Polynom der Matrix $A \in M_n(K)$ zerfalle über K vollständig in Linearfaktoren, genauer gelte $\det(A - X \cdot I_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{k_i}$. Beweisen Sie die Gleichung $\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^r k_i \lambda_i$.

197) Beweisen Sie:

a) $A^2 - (\operatorname{Spur} A)A + (\det A) I_2 = 0$ für alle $A \in M_2(K)$.

b) Für alle $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt $A^{-1} = (\det A)^{-1}\big((\operatorname{Spur} A)I_2 - A\big)$.

c) Wenn K unendlich viele Elemente enthält, gibt es unendlich viele $A \in M_2(K)$, die $A^2 - I_2 = 0$ erfüllen.

198) Es sei V ein K-Vekorraum, $\varphi : V \to V$ linear und $p \in K[X]$. Beweisen Sie: Wenn $\lambda \in K$ Eigenwert von φ ist, ist $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(\varphi)$.