Proseminar Kommutative Algebra, WS 2007/08

Christoph Baxa

1) Beweisen Sie, daß der Nullring 0 ($= \{0\}$ mit $0 + 0 = 0$ und $0 \cdot 0 = 0$) der einzige kommutative Ring mit 1 ist, in dem $0 = 1$ gilt.

Konvention: Auch im Proseminar bezeichnet ab sofort *Ring* immer einen *kommutativen Ring mit Einselement,* außer es wird explizit etwas anderes festgelegt.

2) Es seien A und B Ringe und $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:
a) Wenn J Ideal von B ist, ist $\varphi^{-1}(J)$ Ideal von A.
b) Wenn I Ideal von A ist und φ surjektiv ist, ist $\varphi(I)$ Ideal von B.

3) Zeigen Sie an Hand eines Beispiels, daß 2b) nicht korrekt ist, wenn φ nicht als surjektiv vorausgesetzt wird.

4) Zeigen Sie: Ist A ein Ring, I ein Ideal von A und $\varphi : A \to A/I$, $\varphi(a) = a + I$, so ist durch $J \mapsto \varphi^{-1}(J)$ eine bijektive, die Ordnungsrelation $\subseteq$ respektierende Abbildung zwischen den Idealen von A/I und denjenigen Idealen von A, die I enthalten, gegeben.

5) Überprüfen Sie, daß der binomische Lehrsatz in Ringen gilt.

6) Finden Sie A^*, $\mathrm{NT}(A)$, $\mathrm{NNT}(A)$ und $\mathrm{Nil}(A)$ für

a) $A = \mathbb{Z}$ b) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ c) $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ d) $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

7) Sei A ein Ring.
a) Zeigen Sie: Wenn $x \in \mathrm{Nil}(A)$, dann ist $1 + x \in A^*$.
b) Leiten Sie aus Teil a) ab: Wenn $u \in A^*$ und $x \in \mathrm{Nil}(A)$, dann ist $u + x \in A^*$.

8) Es sei A ein Ring und $p(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in A[X]$. Beweisen Sie

$$p \in \bigl(A[X]\bigr)^* \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 \in A^* \text{ und } a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Nil}(A)$$

Hinweis: Wenn $p \cdot q = 1$ mit $q(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$, zeigen Sie mit Induktion nach r, daß $a_n^{r+1}b_{m-r} = 0$. Folgern Sie, daß a_n nilpotent ist und verwenden Sie das vorangegangene Beispiel.

9) Es sei A ein Ring und $p(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in A[X]$. Beweisen Sie, daß p genau dann nilpotent ist, wenn $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{Nil}(A)$.

10) Für alle $j \in M (\neq \varnothing)$ sei I_j ein Ideal des Rings A. Zeigen Sie, daß $\sum\limits_{j \in M} I_j$ und $\bigcap\limits_{j \in M} I_j$ ebenfalls Ideale von A sind.

11) Beweisen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels: Die Vereinigung $I \cup J$ zweier Ideale I und J eines Rings A ist nicht immer ein Ideal.

12) Es seien I, J Ideale des Rings A. Zeigen Sie:

a) $I \cdot J$ ist Ideal von A b) $I \cdot J \subseteq I \cap J$ c) $I \cdot A = I$

13) Es seien I_1, I_2, I_3 Ideale des Rings A. Beweisen Sie:

a) $(I_1 + I_2) + I_3 = I_1 + (I_2 + I_3)$ b) $I_1 + I_2 = I_2 + I_1$

c) $(I_1 \cdot I_2) \cdot I_3 = I_1 \cdot (I_2 \cdot I_3)$ d) $I_1 \cdot I_2 = I_2 \cdot I_1$

e) $I_1 \cdot (I_2 + I_3) = I_1 \cdot I_2 + I_1 \cdot I_3$ f) $(I_1 + I_2) \cdot I_3 = I_1 \cdot I_3 + I_2 \cdot I_3$

14) Beweisen Sie für den Hauptidealring $\mathbb{Z}$:

a) $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \operatorname{ggT}(a, b)\,\mathbb{Z}$ b) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \operatorname{kgV}(a, b)\,\mathbb{Z}$ c) $(a\mathbb{Z}) \cdot (b\mathbb{Z}) = (a \cdot b)\,\mathbb{Z}$

15) Es sei A der Ring $A = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Die Ideale P, P_1, P_2 seien durch $P := (2, 1 + i\sqrt{5})$, $P_1 := (3, 1 + i\sqrt{5})$, $P_2 := (3, 1 - i\sqrt{5})$ gegeben. Beweisen Sie:

a) $P^2 = (2)$ (Hinweis: Zeigen Sie zuerst $P = (2, 1 - i\sqrt{5})$.)
b) $P_1 \cdot P_2 = (3)$
c) $P \cdot P_1 = (1 + i\sqrt{5})$
d) $P \cdot P_2 = (1 - i\sqrt{5})$
e) $(6) = (2) \cdot (3) = (1 + i\sqrt{5}) \cdot (1 - i\sqrt{5}) = P^2 \cdot P_1 \cdot P_2$

16) Beweisen Sie: Sind I, J Ideale des Rings A, so gelten

a) $I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ b) $I \subseteq \sqrt{I}$ c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

17) Beweisen Sie: Sind I, J Ideale des Rings A, so gelten

a) $\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ b) $\sqrt{I} = A \Leftrightarrow I = A$ c) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

18) Es seien I, J Ideale des Rings A. Zeigen Sie: Wenn $\sqrt{I}$ und $\sqrt{J}$ coprim sind, sind auch I und J coprim. Hinweis: Verwenden Sie Teile b) und c) des vorangegangenen Beispiels.

19) Es seien $A_1, \dots , A_n$ Ringe. Beweisen Sie:

a) Der Ring $\prod_{i=1}^{n} A_i$ ist genau dann Integritätsbereich, wenn es ein $j \in \{1, \dots , n\}$ gibt, sodaß A_j Integritätsbereich ist und $A_i \cong 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $i \neq j$.

b) Die Ideale von $\prod_{i=1}^{n} A_i$ sind von der Gestalt $\prod_{i=1}^{n} I_i$ wobei I_i Ideal von A_i ist (für $1 \leq i \leq n$). Achtung: Es handelt sich beide Male um ein kartesisches Produkt.

c) Beweisen Sie: Mit den Notationen von Teil b) gilt

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \Big/ \prod_{i=1}^{n} I_i \cong \prod_{i=1}^{n} (A_i/I_i)$$

d) Das Ideal $\prod_{i=1}^{n} I_i$ ist genau dann Primideal von $\prod_{i=1}^{n} A_i$ wenn es ein $j \in \{1, \dots , n\}$ gibt, sodaß I_j Primideal von A_j ist und $I_i = A_i$ für $1 \leq i \leq n$ und $i \neq j$.

20) Es sei A ein Ring und P Primideal von A. Beweisen Sie: Wenn es für ein $a \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß $a^n \in P$, dann gilt bereits $a \in P$.

21) Beweisen Sie: Wenn P Primideal des Rings A ist, gilt $\sqrt{P^n} = P$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

22) Es seien A und B Ringe und $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie: Wenn P ein Primideal von B ist, ist $\varphi^{-1}(P)$ Primideal von A.

23) Zeigen Sie: Ist A ein Ring, I ein Ideal von A und $\varphi : A \to A/I$, $\varphi(a) = a + I$, so ist durch $P \mapsto \varphi^{-1}(P)$ eine bijektive, die Ordnungsrelation $\subseteq$ respektierende Abbildung zwischen den Primidealen von A/I und denjenigen Primidealen von A, die I enthalten, gegeben.

24) Es sei C der Ring $C = \{f \mid f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f \text{ ist stetig}\}$. Beweisen Sie:

a) Ist $x_0 \in [0, 1]$, so ist $I_{x_0} = \{f \in C \mid f(x_0) = 0\}$ ein Ideal von C.

b) Jedes der Ideale I_{x_0} aus Teil a) ist maximal. Hinweis: Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi_{x_0} : C \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x_0)$ ein Ringhomomorphismus ist.

c) Besitzen $f_1, \dots , f_n \in C$ keine gemeinsame Nullstelle, so ist $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 \in C^*$.

d) Ist $I(\neq C)$ ein Ideal von C, so gibt es (mindestens) einen Punkt $x \in [0, 1]$, der gemeinsame Nullstelle aller $f \in I$ ist.
Hinweis: Indirekt beweisen. Kompaktheit von $[0, 1]$ und Teil c) verwenden.

e) Jedes maximale Ideal von C ist von der in Teil b) angegebenen Gestalt.

25) Es sei A ein Ring und I ein Ideal von A. Beweisen Sie: Es gilt genau dann $I = \sqrt{I}$ wenn sich I als Durchschnitt von Primidealen schreiben läßt.

26) Es seien A, B zwei Ringe und $\varphi : A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Beweisen Sie:

a) Ist I Ideal von A, so gilt $\varphi\big(\sqrt{I}\big) \subseteq \sqrt{\varphi(I)}$.
b) Ist I Ideal von A und $\ker\varphi \subseteq I$, so gilt $\varphi\big(\sqrt{I}\big) = \sqrt{\varphi(I)}$.
c) Es gilt $\varphi(\operatorname{Jac} A) \subseteq \operatorname{Jac} B$.

27) Zeigen Sie: Ist A ein Ring, I ein Ideal von A und $\varphi : A \to A/I$, $\varphi(a) = a + I$, so ist durch $P \mapsto \varphi^{-1}(P)$ eine bijektive Abbildung zwischen den maximalen Idealen von A/I und den maximalen Idealen von A, die I enthalten, gegeben.

28) Bestimmen Sie die Primideale und die maximalen Ideale des Rings A und $\operatorname{Jac} A$ für

a) $A = \mathbb{Z}$ b) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ c) $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ d) $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

29) Es seien I_1, I_2 und I Ideale des Rings A und $S \subseteq A$ multiplikativ. Beweisen Sie:

a) $S^{-1}(I_1 + I_2) = S^{-1}I_1 + S^{-1}I_2$ b) $S^{-1}(I_1 \cdot I_2) = (S^{-1}I_1) \cdot (S^{-1}I_2)$
c) $S^{-1}(I_1 \cap I_2) = (S^{-1}I_1) \cap (S^{-1}I_2)$ d) $\sqrt{S^{-1}I} = S^{-1}\sqrt{I}$

30) Es sei I ein Ideal des Rings A und $S = 1 + I = \{1 + a \mid a \in I\}$. Beweisen Sie:

a) Die Primideale von $S^{-1}A$ entsprechen bijektiv den Primidealen P von A, die $I + P \neq A$ erfüllen.
b) Es gilt $S^{-1}I \subseteq \operatorname{Jac}(S^{-1}A)$.

31) Schreiben Sie den Beweis der Inclusion

$$\bigcap_{P \text{ Primideal}} P \subseteq \operatorname{Nil} A$$

aus Satz 1.11(i) um. Verwenden Sie dabei den Ring $S^{-1}A$ mit $S = \big\{a^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}$.

32) Es sei A ein Ring und S und T zwei multiplikative Teilmengen von A. Beweisen Sie, daß $ST = \{st \mid s \in S, t \in T\} (\subseteq A)$ und $i_{A,S}(T) (\subseteq S^{-1}A)$ mulitplikativ sind und daß $(ST)^{-1}A \cong \big(i_{A,S}(T)\big)^{-1}(S^{-1}A)$.

33) Es seien $A = \mathbb{Z}$, $P = (2) = 2\mathbb{Z}$, $S = A \setminus P = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, $I = (2) = 2\mathbb{Z}$ und $J = (6) = 6\mathbb{Z}$. Zeigen Sie $S^{-1}I = S^{-1}J$ in $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(2)}$.

34) Es sei $A \ncong 0$ ein Ring und $\Sigma = \{S \mid S \subseteq A$ ist multiplikativ und $0 \notin S\}$. Zeigen Sie:

a) Ist $S \in \Sigma$, so gibt es ein (bezüglich der Inklusion $\subseteq$) maximales $T \in \Sigma$ mit $S \subseteq T$.

b) Es gilt: $S \in \Sigma$ ist maximal $\Leftrightarrow A \setminus S$ ist minimales Primideal von A

35) Eine multiplikative Teilmenge S eines Rings A heißt saturiert, wenn für $x, y \in A$ gilt, daß aus $xy \in S$ folgt, daß $x \in S$ und $y \in S$. Beweisen Sie:

a) Eine multiplikative Menge $S \subseteq A$ ist genau dann saturiert wenn $A \setminus S$ Vereinigung von Primidealen von A ist.

b) In jedem Ring A ist $\mathrm{NNT}(A)$ ist saturiert.

36) Es seien A, B Ringe, $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und M ein B-Modul. Beweisen Sie, daß M durch $A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto \varphi(a)m$ zu einem A-Modul wird.

37) Es sei A ein Ring, M ein A-Modul und I ein Ideal von A mit der Eigenschaft, daß $ax = 0$ für alle $a \in I$ und alle $x \in M$. Beweisen Sie:

a) $bx = cx$ wenn $b \equiv c \pmod{I}$,

b) M wird durch $(a + I) \cdot m = \overline{a} \cdot m := a \cdot m$ ein A/I-Modul.

38) Es sei A ein Ring und M_1, M_2 zwei A-Moduln. Beweisen Sie: Setzt man

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(m) := \varphi_1(m) + \varphi_2(m) \text{ (für } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2),\ m \in M_1)$$
$$\text{und} \quad (a\varphi)(m) := a\varphi(m) \text{ (für } a \in A,\ \varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2),\ m \in M_1),$$

so wird $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ ein A-Modul.

39) Es sei A ein Ring und M_1, M_2, M_3 drei A-Moduln. Zeigen Sie: Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3)$, dann ist $\psi \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_3)$.

40) Es sei A ein Ring und $\overline{M}, M, N, \overline{N}$ vier A-Moduln. Außerdem seien zwei A-Modulhomomorphismen $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(\overline{M}, M)$ und $\omega \in \mathrm{Hom}_A(N, \overline{N})$ gegeben. Beweisen Sie:

a) Die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(\overline{M}, N)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \alpha$ ist A-linear.

b) Die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, \overline{N})$, $\varphi \mapsto \omega \circ \varphi$ ist A-linear.

41) Es sei A ein Ring und M ein A-Modul. Beweisen Sie $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$. Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$, $\varphi \mapsto \varphi(1)$.

42) Es sei A ein Ring, M ein A-Modul und N ein Untermodul von M. Beweisen Sie:

a) Der Faktormodul M/N ist ein A-Modul.

b) Die Abbildung $\varphi : M \to M/N$, $\varphi(m) = m + N$ ist in $\mathrm{Hom}_A(M, M/N)$ und surjektiv.

43) Es sei V der reelle Vektorraum $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ und

$$U = \left\{ f \in V \;\middle|\; \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Beweisen Sie $V/U \cong \mathbb{R}$ (Isomorphie von $\mathbb{R}$-Moduln, d.h. reellen Vektorräumen).

44) Beweisen Sie, daß die direkte Summe von Moduln durch ihre in Satz 3.14 (i) angegebene Eigenschaft charakterisiert wird, d.h. für alle $i \in I$ sei M_i ein A-Modul, S sei ein A-Modul und für alle $i \in I$ sei $\kappa_i : M_i \to S$ ein A-Modulhomomorphismus.
Zeigen Sie: Wenn S die Eigenschaft besitzt, daß es zu jedem A-Modul N und jeder Familie von A-Modulhomomorphismen $\varphi : M_i \to N$ (mit $i \in I$) einen eindeutig bestimmten A-Modulhomomorphismus $\varphi : S \to N$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ \kappa_i = \varphi_i$ für alle $i \in I$ gibt, dann gilt $S \cong \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$.

45) Für alle $in \in I$ sei M_i ein A-Modul. Das direkte Produkt der $(M_i)_{i \in I}$ ist als

$$\prod_{i \in I} M_i = \big\{ (m_i)_{i \in I} \mid m_i \in M_i \text{ für alle } i \in I \big\}.$$

definiert. Beweisen Sie:

a) Durch die folgenden beiden Verknüpfungen wird $\prod_{i \in I} M_i$ ein A-Modul:

$$(m_i)_{i \in I} + (n_i)_{i \in I} := (m_i + n_i)_{i \in I} \text{ und } a(m_i)_{i \in I} := (am_i)_{i \in I} \text{ (mit } a \in A)$$

b) Die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} M_i$ ist Untermodul von $\prod_{i \in I} M_i$.

c) Für alle $j \in I$ ist $\pi_j : \prod_{i \in I} M_i \to M_j$, $(m_i)_{i \in I} \mapsto m_j$ ein A-Modulhomomorphismus.

d) Es sei N ein A-Modul und für $i \in I$ sei $\varphi_i : N \to M_i$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\varphi : N \to \prod_{i \in I} M_i$, derart daß $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$ für alle $i \in I$.

e) Es sei P ein A-Modul, der die Eigenschaft von $\prod_{i \in I} M_i$ aus Teil d) erfüllt (d.h. für alle $i \in I$ ist $\tau_i \in \mathrm{Hom}_A(P, M_i)$ und ist N ein A-Modul und $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_A(N, M_i)$ so gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus $\varphi : N \to P$ mit $\tau_i \circ \varphi = \varphi_i$ für $i \in I$). Dann gilt $P \cong \prod\limits_{i \in I} M_i$, d.h. $\prod\limits_{i \in I} M_i$ ist durch die Eigenschaft d) eindeutig bestimmt.

46) Es sei A ein Ring, I ein Ideal von A und M ein A-Modul. Beweisen Sie:

a) Durch $(a + I)(x + IM) := ax + IM$ wird M/IM ein A/I-Modul.

b) Ist $x_1, \ldots, x_n$ Basis von M über A, so ist $x_1 + IM, \ldots, x_n + IM$ Basis von M/IM über A/I.

47) a) Es sei M ein A-Modul. Beweisen Sie: Sind $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_m$ zwei Basen von M, so gilt $m = n$. Hinweis: Verwenden Sie ein maximales Ideal von A und das vorangegangene Beispiel, um die Frage auf die entsprechende Eigenschaft für Vektorräume zurückzuführen.

b) Folgern Sie aus Teil a): Ist A ein Ring und $A^n \cong A^m$, so ist $n = m$.

Definition. Es sei M ein endlich erzeugter und freier A-Modul. Die Anzahl der Elemente einer (und nach dem vorangegangenen Beispiel damit jeder) Basis von M wird als Rang von M bezeichnet.

48) Es sei A ein Ring, I und J zwei Ideale von A und M ein A-Modul. Zeigen Sie:

a) $(I + J)M = IM + JM$.
b) $I(JM) = (IJ)M$.
c) Sind N_1 und N_2 zwei Untermoduln von M, dann gilt $I(N_1 + N_2) = IN_1 + IN_2$.

49) Es sei A ein Hauptidealring. Beweisen Sie:

a) Ist $I \neq (0)$ Ideal von A, so ist $I \cong A$ (Isomorphie von A-Moduln).
b) Ist M ein A-Modul, $\varphi : M \to A$ ein A-Modulhomomorphismus mit der Eigenschaft, daß es ein $x \in M$ gibt, daß $\varphi(x) \neq 0$ erfüllt, so ist $M \cong \ker\varphi \oplus A$.

50) Es sei A ein Hauptidealring und M ein freier A-Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Jeder Untermodul N von M ist ebenfalls frei und der Rang von N ist höchstens n. Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach n. Betrachten Sie den A-Modulhomomorphismus $\varphi : M \to A$, der folgendermaßen gegeben ist: Ist $x_1, \dots, x_n$ Basis von M, so sei

$$\varphi(a_1x_1 + \dots + a_nx_n) = a_n.$$

Verwenden Sie das vorangegangene Beispiel für den Induktionsschritt.

51) Es seien M_1, M_2 und N Untermoduln des A-Moduls M. Beweisen Sie: Wenn die drei Bedingungen $M_1 \subseteq M_2$, $M_1 \cap N = M_2 \cap N$ und $M_1 + N = M_2 + N$ erfüllt sind, gilt $M_1 = M_2$.

52) Beweisen Sie nochmals Satz 3.20, diesmal ohne die Charakterisierung aus Satz 3.19 zu verwenden. Benützen Sie stattdessen das vorangegangene Beispiel.
Hinweis: Ist $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M, so betrachten Sie die beiden Folgen $(M_1 + N)/N \subseteq (M_2 + N)/N \subseteq (M_3 + N)/M \subseteq \cdots$ und $M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq M_3 \cap N \subseteq \cdots$ von Untermoduln, um die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu beweisen.

53) Es sei A ein Integritätsbereich. Beweisen Sie:

a) Für $a, b \in A$ gilt: $a \mid b \iff (b) \subseteq (a)$

b) Für $a, b \in A$ gilt: $(a) = (b) \iff \exists\, u \in A^* : b = ua$

c) Ein Element $a \in A \setminus \{0\}$ ist genau dann irreduzibel wenn (a) maximal ist in der Menge der Hauptideale $\neq (1)$ von A.

54) Es sei A ein noetherscher Integritätsbereich. Beweisen Sie: Jedes Element $a \in A \setminus A^*$, $a \neq 0$ kann als endliches Produkt irreduzibler Elemente von A geschrieben werden.

Definition. Ein A-Modul M heißt artinsch, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} \supseteq \cdots$$

von Untermoduln stationär wird, d.h. es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $M_i = M_{n_0}$ für alle $i \geq n_0$. Ein Ring A heißt artinsch wenn er als A-Modul artinsch ist, d.h. wenn jede absteigende Kette von Idealen von A stationär wird.

55) Beweisen Sie: Ein A-Modul M ist genau dann artinsch wenn jede nichtleere Menge von Untermoduln ein (bezüglich der Mengeninklusion) minimales Element besitzt.

56) Es sei N ein Untermodul des A-Moduls M. Beweisen Sie: M ist genau dann artinsch wenn sowohl N als auch M/N artinsch sind.

57) Es seien $M_1, \ldots, M_n$ artinsche A-Moduln. Beweisen Sie, daß dann auch $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ ein artinscher A-Modul ist.

58) Es sei A ein artinscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Beweisen Sie, daß M ein artinscher A-Modul ist.

59) Beweisen Sie: Ist ein Integritätsbereich A artinsch, so ist A bereits ein Körper. Hinweis: Betrachten Sie $(a) \supseteq (a^2) \supseteq (a^3) \supseteq \cdots$ für $a \in A \setminus \{0\}$.

60) Beweisen Sie: Ist P Primideal des artinschen Rings A, so ist P bereits maximales Ideal von A. Hinweis: Betrachten Sie A/P.

61) Beweisen Sie: Ein artinscher Ring A besitzt nur endlich viele maximale Ideale. Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\mathcal{M} := \{P_1 \cap \cdots \cap P_n \mid P_1, \ldots, P_n \text{ maximale Ideale von } A\}$ und verwenden Sie Satz 1.15.

62) Es sei A ein artinscher Ring. Beweisen Sie, daß $A/\operatorname{Jac} A$ zu einem endlichen direkten Produkt von Körpern isomorph ist.

63) Welcher der folgenden Moduln ist artinsch bzw. noethersch?

a) Eine endliche abelsche Gruppe G (als $\mathbb{Z}$-Modul)
b) Der Ring $\mathbb{Z}$ (als $\mathbb{Z}$-Modul)
c) Ein Körper K (also K-Modul)
d) Ein endlichdimensionaler K-Vektorraum V (als K-Modul)
e) Der Polynomring $K[X]$ (mit K ein Körper, als $K[X]$-Modul)

64) Es sei p eine Primzahl und

$$G := \left\{e^{2\pi i m/p^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Beweisen Sie, daß $(G, \cdot)$ ein artinscher aber nicht noetherscher $\mathbb{Z}$-Modul ist. Hinweis: Zeigen Sie, daß die Menge der echten Untergruppen von G durch $\left\{G_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$ gegeben ist, wobei

$$G_n = \left\{e^{2\pi i m/p^n} \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

65) Es seien M_1 und M_2 zwei A-Moduln. Beweisen Sie

$$\operatorname{Ass}_A(M_1 \oplus M_2) = \operatorname{Ass}_A(M_1) \cup \operatorname{Ass}_A(M_2).$$

Bestimmen Sie $\operatorname{Ass}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\big)$.

66) Es sei $A = \mathbb{Z}[X]$. Beweisen Sie, daß $P = (2, X)$ maximales Ideal von A und $Q = (4, X)$ ein P-primäres Ideal, aber keine Potenz von P ist.

67) Beweisen Sie: Im Ring $A = \mathbb{R}[X, Y, Z]$ sind $P_1 = (X, Y)$ und $P_2 = (X, Z)$ Primideale und $P_3 = (X, Y, Z)$ maximales Ideal und $P_1 \cdot P_2 = P_1 \cap P_2 \cap P_3^2$ ist unverkürzbare Primärzerlegung von $P_1 \cdot P_2$.

68) Es sei M ein A-Modul endlicher Länge. Beweisen Sie: Sind E und F zwei Untermoduln von M, so gilt

$$\ell_A(E) + \ell_A(F) = \ell_A(E + F) + \ell_A(E \cap F).$$