Proseminar Analysis 2, WS 2006/07

Christoph Baxa

83) Benützen Sie das in Satz 3.17 beschriebene Verfahren, um $\sqrt{3}$ mit Hilfe eines Taschenrechners auf zwei Kommastellen genau zu berechnen. (D.h. wählen Sie einen Startpunkt x_0, der $x_0^2 \geq 3$ und $x_0 \leq \frac{3+1}{2} = 2$ erfüllt und berechnen Sie iterativ $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{3}{x_n})$.) Beweisen Sie mit Hilfe der im Satz angegebenen Fehlerabschätzung, daß die Näherung wirklich auf zwei Kommastellen korrekt ist.

84) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$

85) Es sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (wobei $n > 0$ und $a_n \neq 0$ gelten soll). Beweisen Sie:

a) Wenn n gerade und $a_n > 0$ ist, gelten $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = +\infty$

b) Wenn n ungerade ist und $a_n > 0$, gelten $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$

Wie lauten die entsprechenden Aussagen für $a_n < 0$?

86) Beweisen Sie: Wenn die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grad hat, besitzt sie mindestens eine reelle Nullstelle.

87) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot c_{\mathbb{Q}}(x)$. Beweisen Sie, daß f im Punkt 0 differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(0)$. Ist f in $x \neq 0$ differenzierbar?

88) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f_1, \ldots, f_n : I \to \mathbb{R}$ seien alle in ξ differenzierbar. Beweisen Sie: Dann ist auch $f_1 \cdots f_n : I \to \mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und es gilt

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(\xi) = (f_1' f_2 \cdots f_n)(\xi) + (f_1 f_2' f_3 \cdots f_n)(\xi) + \cdots + (f_1 \cdots f_{n-1} f_n')(\xi).$$

89) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$ (mit $x \neq -2$) b) $f(x) = e^{2x+3}$ c) $f(x) = x \log x$

90) Differenzieren Sie die Funktion $f(x) = x^x$ (mit $x > 0$).

91) Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die folgenden Funktionen (mit $n \in \mathbb{N}$):

a) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.
b) $f(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots + n^2x^n$.

92) Beweisen Sie, ausgehend von der Gleichung $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$, mittels Differenzieren die folgenden Identitäten für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

93) Es sei $0 < a \leq 1$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, daß die Polynomfunktion $x \mapsto ax^3 - 3ax + b$ (mit $b \in \mathbb{R}$ beliebig) im Intervall $[-a, a]$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

94) Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und n-mal differenzierbar auf (a, b). Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle: Wenn es $n+1$ Punkte $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ in $[a, b]$ gibt, für die $f(x_i) = 0$ gilt (mit $0 \leq i \leq n$) dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$, sodaß $f^{(n)}(\xi) = 0$.

95) Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wo nimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n}(x - a_j)^2$ ein Miniumum an?

96) Welche Bedingung müssen $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein lokales Maximum besitzt?

97) Welche Bedingung muß $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 + 3x + 5$ kein lokales Extremum besitzt?

98) Finden Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f : [1, 7] \to \mathbb{R},\ f(x) = 7x^5 + x^3 + \tfrac{x-1}{x}.$$

99) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die im Punkt 0 dreimal aber nicht viermal differenzierbar ist.

100) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \log(1 + 1/x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1-} \log x \cdot \log(1 - x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

101) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (mit $a > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$):

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 - x)^\alpha - (1 - \alpha x)}{x^2}$ b) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$

102) Ist es möglich, den Grenzwert

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

durch (direkte) Anwendung der Regel von de l'Hospital zu finden? Falls nicht, finden Sie einen anderen Weg zu seiner Berechnung.

103) Finden Sie den Fehler in der folgenden Anwendung der Regel von de l'Hospital. Wie lautet der wahre Grenzwert?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x + 2}{2} = 4$$

104) Berechnen Sie das $n$te Taylorpolynom $T_{n,0}$ samt Lagrangeschem Restglied für die Entwicklung der Funktion f rund um den Punkt 0:

a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $f(x) = \sqrt{1+x}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

105) Berechnen Sie die Zahl e mit Hilfe der Reihendarstellung

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

und eines Taschenrechners auf zwei Stellen genau. Beweisen Sie die Genauigkeit der Approximation, indem Sie das Lagrangesche Restglied einer geeigneten Taylorentwicklung abschätzen.

106) Auf welchen Intervallen ist die Funktion f konkav bzw. konvex?

a) $f(x) = x^3 - 12x + 11$ b) $f(x) = x \log x$ (mit $x > 0$)

107) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $\log x < x - 1$ für $x > 0$ und $x \neq 1$,
b) $\alpha x^{\alpha-1}(x-y) < x^\alpha - y^\alpha < \alpha y^{\alpha-1}(x-y)$ für $0 < \alpha < 1$ und $x, y > 0$ mit $x \neq y$,
c) $\alpha x^{\alpha-1}(x-y) > x^\alpha - y^\alpha > \alpha y^{\alpha-1}(x-y)$ für $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$ und $x, y > 0$ mit $x \neq y$.

108) Sei $a > 0$ und die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ sei durch $x_0 \in (0, 1/\sqrt{a})$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n - ax_n^3)$ gegeben. Beweisen Sie, daß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1/\sqrt{a}$. Hinweis: Wenden Sie Satz 4.33 auf die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2} - a$ an.

109) Verwenden Sie das Verfahren, das im vorangegangenen Beispiel beschrieben wurde, um $1/\sqrt{5}$ auf zwei Stellen genau zu berechnen. Schätzen Sie den Fehler mit Hilfe der in der Vorlesung beschriebenen Schranken ab.

110) Gegeben sei eine endliche Menge $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq [a, b]$ und eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ (d.h. wenn $f(x) \neq 0$ dann $x = a_i$ für ein i). Beweisen Sie, daß f Riemann-integrierbar ist und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

111) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \text{ irrational ist,} \\ \frac{1}{q} & \text{wenn } x = \frac{p}{q} \text{ rational ist (mit } \operatorname{ggt}(p, q) = 1). \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß f Riemann-integrierbar ist und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

112) Es seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $p < q$. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{1}{pn+1} + \frac{1}{pn+2} + \frac{1}{pn+3} + \cdots + \frac{1}{qn} \Big) = \int_p^q \frac{dx}{x} \Big(= \log \frac{q}{p} \Big).$$

113) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie mit Hilfe einer Riemannschen Summe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \Big(1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p \Big) = \int_0^1 x^p\,dx \Big(= \frac{1}{p+1} \Big)$$

114) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: Wenn f und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nur an endlich vielen Stellen verschiedene Werte annehmen, dann ist auch g Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

115) Es sei $a > 0$ und $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Beweisen Sie:

a) Wenn f ungerade ist (d.h. $f(-x) = -f(x)$ für $0 \le x \le a$), gilt $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$,

b) Wenn f gerade ist (d.h. $f(-x) = f(x)$ für $0 \le x \le a$), gilt $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

116) Beweisen Sie: Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{für } \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

gegeben ist, ist Riemann-integrierbar, besitzt auf dem Intervall $[-1, 1]$ aber keine Stammfunktion. Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für Ableitungen (Satz 4.14).

117) Beweisen Sie, daß die Verknüpfung zweier Riemann-integrierbarer Funktionen nicht Riemann-integrierbar zu sein braucht. D.h. geben Sie zwei Riemann-integrierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ an, derart, daß $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ und $g \circ f$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Die folgenden Beispiele beschäftigen sich mit den Hyperbelfunktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert werden:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} \quad (\text{für } x \neq 0)$$

118) a) Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.
b) Beweisen Sie $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (Diese Relation erklärt die Namen. Welcher Teil der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ wird durch $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ parametrisiert?)

119) Beweisen Sie:
a) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$, was ist $\frac{d}{dx} \cosh x$? Was ist $\frac{d^n}{dx^n} \sinh x$, was $\frac{d^n}{dx^n} \cosh x$?
b) $\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$, was ist $\frac{d}{dx} \coth x$?

120) a) Beweisen Sie: $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
b) Finden Sie eine analoge Formel für $\sinh(x + y)$

121) Beweisen Sie:
a) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ und $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$,
b) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

122) Beweisen Sie

$$\text{a)}\ \cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \text{b)}\ \sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

123) Beweisen Sie

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

124) Definieren Sie die Umkehrfunktionen zu sinh, cosh und tanh, genannt Arsinh (lies: Area sinus hyperbolicus), Arcosh und Artanh auf $\mathbb{R}$, $[1, +\infty)$ und $(-1, 1)$, skizieren Sie ihre Graphen und berechnen Sie ihre Ableitungen.

125) Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$,

b) $\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \geq 1$,

c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in (-1,1)$.

Hinweis: Verwenden Sie das vorangegangene Beispiel und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

126) Überprüfen Sie durch Differenzieren auf den drei Intervallen $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ und $(1,+\infty)$, daß

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| .$$

Auf welcher Menge ist die Gleichung $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Artanh} x$ gültig?

127) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)} \int x\sqrt{x+1}\, dx \qquad \text{b)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\, dx \qquad \text{c)} \int \sqrt[3]{x+1}\,(x-1)^2\, dx$$

128) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_0^1 x(2x-1)^5\, dx \qquad \text{b)} \int_0^2 (x^2+1)\sqrt[3]{(x-1)^2}\, dx$$

129) Verwenden Sie partielle Integration, um Rekursionsformeln zur Berechnung der folgenden beiden Stammfunktionen herzuleiten:

a) $\int x^n \sinh x\, dx$ b) $\int x^n \cosh x\, dx$

130) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)} \int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{b)} \int x^{-1/3}\left(x^{2/3}+1\right)^{1/3} dx \qquad \text{c)} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

131) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x\, dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(2-x^3)^3} \qquad \text{c)} \int_1^8 x^3\sqrt{1+x^4}\, dx$$

132) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen mit Hilfe der Substitution $x = \sinh t$:

$$\text{a)} \int \sqrt{x^2+1}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^3}$$

133) Bestimmen Sie, für welche α das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie für diese α seinen Wert:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$$

134) Berechnen Sie die folgenden beiden uneigentlichen Integrale:

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad \qquad \text{b)} \quad \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx$$

135) Beweisen Sie: Wenn für zwei Funktionen $f, g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existieren und $c \in \mathbb{R}$ ist, dann existieren auch die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx$ und $\int_a^\infty (cf)(x)\,dx$ und es gelten:

$$\text{a)} \int_a^\infty (f+g)(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx \qquad \text{b)} \int_a^\infty (cf)(x)\,dx = c\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

136) Finden Sie zwei unbeschränkte Funktionen $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$, sodaß die uneigentlichen Integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ und $\int_0^1 g(x)\,dx$ beide existieren, das uneigentliche Integral der Funktion $x \mapsto f(x)\cdot g(x)$ auf $(0,1]$ aber nicht existiert.

137) Finden Sie eine unbeschränkte Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften, daß $f \geq 0$ und daß das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ existiert. (D.h. für alle $M > 0$ soll ein $x \geq 0$ existieren, sodaß $f(x) \geq M$.)

138) Beweisen Sie, daß die Gammafunktion die folgende Funktionalgleichung erfüllt: Für alle $x > 0$ ist $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. (Hinweis: Partielle Integration.) Folgern Sie daraus, daß $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

139) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die "Verdoppelungsformel" $\Gamma(2n)\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

140) Beweisen Sie

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

und finden Sie eine analoge Formel für $\cos x + \cos y$.

141) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{a)} \sin^2 x = \tfrac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big) \qquad \qquad \text{b)} \cos^2 x = \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big)$$

142) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ b) $\sin(3x) = -4\sin^3 x + 3\sin x$

143) a) Zeigen Sie mit Hilfe des vorletzten Beispiels $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des vorangegangenen Beispiels $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ und folgern Sie daraus $\sin(\pi/6) = 1/2$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b), daß $\cos(\pi/3) = 1/2$ und $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

144) Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $$\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x\cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x\cos^{n-3} x + \binom{n}{5}\sin^5 x\cos^{n-5} x - + \cdots$$

b) $$\cos(nx) = \binom{n}{0}\cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x\sin^4 x - + \cdots$$

145) Beweisen Sie:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Leiten Sie Formeln für $\tan(x-y)$, $\tan(2x)$ und $\cot(x+y)$ ab.

146) Beweisen Sie: a) Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$,

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$.

147) Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

148) Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist im Punkt $x = 0$ stetig aber nicht differenzierbar. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

149) Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, ihre Ableitung f' ist im Punkt $x = 0$ aber nicht stetig. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

150) Die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, besitzt für $x \geq 0$ eine Ableitung $f := F'$ (und daher f eine Stammfunktion), die Einschränkung von f auf das Intervall $[0,1]$ ist aber nicht Riemann-integrierbar.

151) Suchen Sie den Fehler in der folgenden Argumentation: Da

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin(2x) = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big)$$

sind sowohl $x \mapsto \sin^2 x$ als auch $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$ Stammfunktion von $x \mapsto \sin(2x)$, also muß $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ gelten.

152) Finden Sie Rekursionsformeln für die folgenden Stammfunktionen (wobei $n \in \mathbb{N}$):

a) $\int \cos^n x\,dx$ b) $\int x^n \cos x\,dx$

153) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \arcsin x\,dx$ b) $\int \arctan x\,dx$

154) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\displaystyle\int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\,dx \quad (\text{für } \alpha \neq 0)$ b) $\displaystyle\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx \quad (\text{für } |\alpha| \neq |\beta|)$

155) Beweisen Sie

a) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$ b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \binom{2k}{k}\frac{\sqrt{\pi k}}{2^{2k}} = 1.$

156) Beweisen Sie $2I_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})$ wobei $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$ wie im Beweis von Satz 5.33.

157) Leiten Sie die folgenden Formeln aus der Vorlesung her. (Dabei erfüllen A und B die Bedingung $A^2 < 4B$ und für $m \in \mathbb{N}$ gilt $m \geq 2$.)

a) $$\int \frac{dx}{x^2 + Ax + B} = \frac{2}{\sqrt{4B - A^2}} \arctan \frac{2x + A}{\sqrt{4B - A^2}}$$

b) $$\int \frac{dx}{(x^2 + Ax + B)^m} = \frac{2x + A}{(m-1)(4B - A^2)(x^2 + Ax + B)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4B - A^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + Ax + B)^{m-1}}$$

158) Leiten Sie die folgenden Formeln aus der Vorlesung her. (Dabei erfüllen A und B die Bedingung $A^2 < 4B$ und für $m \in \mathbb{N}$ gilt $m \geq 2$.)

$$\text{a)} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + Ax + B}\, dx = \frac{\alpha}{2} \log(x^2 + Ax + B) + \left(\beta - \frac{\alpha A}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + Ax + B}$$

$$\text{b)} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2 + Ax + B)^m}\, dx = -\frac{\alpha}{2(m-1)(x^2 + Ax + B)^{m-1}} + \left(\beta - \frac{\alpha A}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + Ax + B)^m}$$

159) Finden Sie die (reelle) Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} \qquad \text{b)} \quad \frac{x+1}{x^4 - x} \qquad \text{c)} \quad \frac{x^2 + 1}{x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2}$$

160) Finden Sie Stammfunktionen für die rationalen Funktionen aus dem vorangegangenen Beispiel.

161) Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie sie durch eine passende Substitution auf die Integrale rationaler Funktionen zurückführen:

$$\text{a)} \quad \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx \qquad \text{b)} \quad \int \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\, dx$$

162) Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale indem Sie sie durch eine passende Substitution auf die Integrale rationaler Funktionen zurückführen:

$$\text{a)} \quad \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \text{b)} \quad \int \frac{dx}{\cos x} \qquad \text{c)} \quad \int \frac{1 + \tan x}{\sin(2x)}\, dx$$

163) Zeigen Sie: Wenn R eine rationale Funktion ist, dann kann man die folgenden unbestimmten Integrale durch eine passende Substitution auf das unbestimmte Integral einer rationalen Funktion zurückführen. (Dabei bedeutet ein Ausdruck der Gestalt $R(x, y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, d.h. eine Funktion der Gestalt $p(x, y)/q(x, y)$, wobei p und q Polynome in zwei Variablen sind.)

$$\text{a)} \quad \int R\big(e^{ax}\big)\, dx \qquad \text{b)} \quad \int R\big(\sinh(ax), \cosh(ax)\big)\, dx$$

$$\text{c)} \quad \int R\big(x, \sqrt[k]{ax + b}\big)\, dx \qquad \text{d)} \quad \int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx$$

164) Berechnen Sie die folgenden Integrale exakt und näherungsweise mittels Sehnentrapez-, Tangententrapez- und Simpson-Regel (in ihrer jeweils einfachsten Form).

a) $\int_0^1 x^2\,dx$ b) $\int_0^1 x^4\,dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Welche Unterschiede in der Qualität der Approximation durch die verschiedenen Formeln kann man erkennen?

165) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - e^{-n^2})$

166) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$

167) Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

168) Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen mit Hilfe von Teleskopsummen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

169) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n})$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$

170) Untersuchen Sie mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums das Konvergenzverhalten der folgenden beiden Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$

171) Untersuchen Sie mit Hilfe des Verdichtungssatzes: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ konvergent?

172) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Verdichtungssatzes: Es sei $p \geq 2$ ganz und $(a_n)_{n\geq 1}$ sei eine monoton fallende Nullfolge. Dann sind die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} p^n a_{p^n}$ entweder beide konvergent oder beide divergent. (Hinweis: Adaptieren Sie den Beweis des Falls $p = 2$ aus der Vorlesung.)

173) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^{n-1}}$

174) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-\frac{1}{2})^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

175) Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}} = 1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots$ ist mit Hilfe des Wurzelkriteriums, nicht aber mit dem Quotientenkriterium erkennbar.

176) Dieses und das folgende Beispiel dienen dazu, das *Kriterium von Raabe,* eine Verfeinerung des Quotientenkriteriums, zu beweisen.
Gibt es ein $\beta > 1$, sodaß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1-\frac{\beta}{n}$ für fast alle n, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. (Beweisskizze: Die Voraussetzung kann zu $(\beta-1)|a_n| \leq (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|$ umgeformt werden. Daraus folgt, daß die Folge $\big(n|a_{n+1}|\big)$ ab einem Index n_0 fällt und nach unten beschränkt ist. Daraus erhält man die Konvergenz der Teleskopreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\big((n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|\big)$, woraus sich mittels der Umformung zu Beginn und des Majorantenkriteriums die Behauptung ergibt.)

177) Gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1-\frac{1}{n}$ für fast alle n, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. (Beweisskizze: Nach der Voraussetzung müssen die a_n ab einem gewissen Index n_0 alle dasselbe Vorzeichen haben (o.B.d.A. seien sie alle positiv) und die Folge (na_{n+1}) ist monoton wachsend und positiv, also durch ein $\alpha > 0$ nach unten beschränkt, d.h. $na_{n+1} \geq \alpha$ für fast alle n. Daraus folgt mit Hilfe des Minorantenkriteriums die Behauptung.)

178) Beweisen Sie mit Hilfe des Kriteriums von Raabe, daß $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert.

179) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n^2+3n+4}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{3}{n})$

180) Untersuchen Sie nochmals die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$, diesmal mit dem Cauchyschen Integralkriterium.

181) Sind die folgenden Reihen absolut konvergent, bedingt konvergent oder divergent?

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3\log n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+13}}$

182) Beweisen Sie mittels eines Produkts zweier Reihen:
a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$ für $|q| < 1$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}q^n = \frac{1}{(1-q)^3}$ für $|q| < 1$.
c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} = e^2$ (Hinweis: Verwenden Sie Bsp. 42)