Proseminar Lineare Algebra 2, WS 2005/06

Christoph Baxa

76) Berechnen Sie die folgenden Determinanten (mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$):

a) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig)

77) Berechnen Sie die folgenden Determinanten (mit Eintragungen aus $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$):

a) $\begin{vmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2i & 3 & 1-3i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

78) a) Es sei $A \in M_n(K)$ und $\alpha \in K$. Zeigen Sie $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch (d.h. $A^t = -A$). Beweisen Sie: Wenn n ungerade ist, gilt $\det A = 0$.
c) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar und $A^{-1} = A^t$. Beweisen Sie $\det A \in \{+1, -1\}$.

79) Zeigen Sie (mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ beliebig)

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2.$$

80) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

a) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

81) Berechnen Sie die sogenannte Vandermonde sche Determinante: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$. Hinweise: Die rechte Seite ist das Produkt über alle Paare $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}$, die $i < j$ erfüllen. Verwenden Sie Induktion nach n. Bringen Sie für den Induktionsschritt die erste Spalte auf die Gestalt $(1, 0, \ldots, 0)$: Multiplizieren Sie dazu die $(n-1)$-te Spalte mit x_1 und subtrahieren Sie sie von der n-ten. Dann multiplizieren Sie die $(n-2)$-te Spalte mit x_1 und subtrahieren Sie sie von der $(n-1)$-ten, usw.

82) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \in M_m(K)$$

und

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} \in M_{nm}(K).$$

Beweisen Sie

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = (\det A)(\det B).$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach der Größe der Matrix.

83) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

a)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

84) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Cramer schen Regel (soferne das möglich ist):

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3&=0\\ x_2-x_3&=1 \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=-2\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4&=12\\ 3x_2-x_3-x_4&=-3\\ 3x_1+2x_2+4x_3+5x_4&=10 \end{aligned}$$

85) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{C}$:

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} ix_1+(2+i)x_2&=1\\ x_1+(2-i)x_2&=1+i \end{aligned} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} 2x_1+ix_2+(1+i)x_3&=1\\ x_1-2x_2+ix_3&=0\\ -ix_1+x_2-(2-i)x_3&=1 \end{aligned}$$

86) Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen (soferne sie existieren):

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

87) Es sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(K)$ und $\det A = ad - bc \neq 0$. Finden Sie eine Formel für A^{-1}.

88) Es sei $A \in M_n(K)$ symmetrisch (d.h. $A^t = A$) und invertierbar. Zeigen Sie, daß dann auch A^{-1} symmetrisch ist.

89) Für welche Werte von $x \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Matrizen invertierbar? Geben Sie die Inversen an (soferne sie existieren).

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} -1 & x & 0\\ x & 1 & x\\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} -x & 1 & 0\\ 1 & x & 1\\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & x\\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

90) Es seien $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 3\\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Lösung $X \in M_3(\mathbb{R})$ der Gleichung $AX + B = 0$ (soferne eine solche existiert).

91) Beweisen Sie, daß durch

$$\left\langle \binom{x_1}{x_2}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 10x_2y_2 \qquad \text{für alle} \quad \binom{x_1}{x_2}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

auf $\mathbb{R}^2$ ein inneres Produkt definiert ist.

92) Es sei $V = M_{mn}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ und für $A, B \in V$ sei $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(A^t \cdot B)$ definiert. Beweisen Sie, daß $\langle ., .\rangle$ ein inneres Produkt auf V ist.

93) Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $V = C([a, b])$ die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie, daß durch

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad \text{für alle } f, g \in C([a, b])$$

ein inneres Produkt auf V gegeben ist. Achten Sie auf eine genaue Argumentation beim Beweis, daß $\langle ., .\rangle$ positiv definit ist.

94) Beweisen Sie:

a) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w} \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$ b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$ c) $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

d) $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ e) $|z| \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0 \iff z = 0$

f) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$ g) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}$

h) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ i) $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$

95) Beweisen Sie, daß durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n} = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i} \qquad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

auf $\mathbb{C}^n$ ein inneres Produkt definiert ist.

96) Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Beweisen Sie, daß durch $(v, w) := \langle [v]_B, [w]_B\rangle$ ein inneres Produkt auf V definiert ist. Dabei bedeutet $\langle ., .\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das im vorangegangenen Beispiel behandelt wurde.

97) Es sei $V = M_{mn}(\mathbb{C})$. Beweisen Sie, daß durch $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(\overline{B}^t \cdot A)$ ein inneres Produkt auf V definiert ist.

98) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle ., .\rangle$. Beweisen Sie: Es seien $v, w \in V$. Dann gilt $\langle v, x\rangle = \langle w, x\rangle \quad \forall\, x \in V \iff v = w$.

99) Es sei V ein unitärer Vektorraum, auf dem die zwei inneren Produkte $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$ definiert sind. Zeigen Sie: Wenn $\langle x,x \rangle_1 = \langle x,x \rangle_2 \quad \forall x \in V$ dann gilt $\langle v,w \rangle_1 = \langle v,w \rangle_2 \quad \forall v,w \in V$. Hinweis: Setzen Sie zuerst $x = v + w$ und dann $x = iv + w$. Gilt die analoge Aussage für euklidische Vektorräume?

100) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm. Dann gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall v,w \in V.$$

101) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm. Beweisen Sie:
a) Wenn V euklidisch ist, gilt

$$\langle v,w \rangle = \tfrac{1}{4}\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\Big) \quad \forall v,w \in V.$$

b) Wenn V unitär ist, gilt

$$\langle v,w \rangle = \tfrac{1}{4}\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2\Big) \quad \forall v,w \in V.$$

102) Es sei $V = \mathbb{R}^n$ (über $\mathbb{R}$) mit $n \geq 2$. Beweisen Sie, daß durch

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine Norm $\|.\|_\infty$ auf V gegeben ist, die nicht von einem inneren Produkt induziert wird.

103) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie, daß

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i \rangle|^2 = \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in V.$$

104) Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ linear und $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Beweisen Sie, daß die Eintragungen in der Matrixdarstellung $[\varphi]_{B,B} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ durch $a_{ij} = \langle \varphi(v_j), v_i \rangle$ (für $1 \leq i,j \leq n$) gegeben sind.

105) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Der Teilraum W sei durch

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben. Verwenden Sie das Gram – Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von W zu finden.

106) Es sei $V = \mathbb{C}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Der Teilraum W sei durch

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right]$$

gegeben. Verwenden Sie das Gram – Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von W zu finden.

107) Es sei $V = C([0,1])$ versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \text{für } f, g \in C([0,1]).$$

Der Teilraum W sei durch $W = [p_0, p_1, p_2]$ gegeben (mit $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$). Verwenden Sie das Gram – Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von W zu finden.

108) Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und W_1 und W_2 Teilräume von V. Beweisen Sie:

a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ b) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

109) Es sei $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ und W bezeichne den von den Zeilenvektoren

$$(a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})^t$$

aufgespannten Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, daß der Raum aller Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = \mathbf{o}$ (mit $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$) mit $W^\perp$ übereinstimmt.

110) Es sei $V = P_2(\mathbb{R})$, versehen mit dem inneren Produkt $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ für alle $p, q \in P_2(\mathbb{R})$. Weiters sei $W = [r]$ mit $r(x) = x + 2$. Bestimmen Sei $W^\perp$.

111) Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ versehen mit dem inneren Produkt $\langle A, B \rangle = \mathrm{Spur}(A^t \cdot B)$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Weiters sei W der Teilraum aller Diagonalmatrizen. Bestimmen Sei $W^\perp$.

112) Sind die folgenden Matrizen orthogonal?

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

113) Sind die folgenden Matrizen unitär?

$$\text{a)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\sqrt{2} - i\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{2}{9}\sqrt{2} - i\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\sqrt{2} + i\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{9}\sqrt{2} - i\frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

114) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$. Beweisen Sie, daß dann $|\operatorname{Spur} A| \leq n$ gilt. Hinweis: Leiten Sie zunächst $a_{11}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \leq n$ aus $A \cdot A^t = I_n$ ab. Wenden Sie dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Standardskalarprodukt auf $(a_{11}, \ldots, a_{nn})^t$ und $(1, \ldots, 1)^t$ an.

115) Beweisen Sie: Die Abbildung $\sigma : M_n(K) \times M_n(K) \to K$, $\sigma(X, Y) = \operatorname{Spur}(X \cdot A \cdot Y)$ (mit fest gewähltem $A \in M_n(K)$) ist eine Bilinearform.

116) Beweisen Sie: Die Abbildung $\sigma : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_k \to \mathbb{R}$, $\sigma\big((a_k)_{k\geq 1}, (b_k)_{k\geq 1}\big) = \lim\limits_{k\to\infty} a_k b_b$ ist eine symmetrische Bilinearform.

117) Beweisen Sie: Die Abbildung $\sigma : P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\sigma(p, q) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}(0) \cdot q^{(k)}(0) = p(0) \cdot q(0) + p'(0) \cdot q'(0) + p''(0) \cdot q''(0) + \cdots$$

ist eine symmetrische Bilinearform. (Beachten Sie, daß es sich bei der Reihe in Wirklichkeit um eine endliche Summe handelt.)

Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform $\sigma : V \times V \to K$ heißt schiefsymmetrisch, wenn $\sigma(v, w) = -\sigma(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt.

118) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis B und $\sigma : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Beweisen Sie, daß σ genau dann schiefsymmetrisch ist, wenn $[\sigma]_B$ schiefsymmetrisch ist.

119) (Comeback von Bsp. 39) Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie: Wenn $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq V$ linear unabhängig ist, dann ist auch $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ linear unabhängig. Was passiert wenn $\operatorname{char} K = 2$ gilt?

120) Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$ und V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie, daß sich jede Bilinearform auf V auf eindeutige Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform darstellen läßt.

Es sei V ein K-Vektorraum und $\sigma : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Dann wird $\operatorname{rad} V := V^\perp = \{v \in V \mid \sigma(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$ als Radikal von V in bezug auf σ bezeichnet.

121) Bestimmen Sie $\operatorname{rad} V$ in bezug auf σ:

a) $V = \mathbb{R}^4$, $\sigma(x,y) = x_1y_1 + x_3y_3$ (mit $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^t$ und $y = (y_1,y_2,y_3,y_4)^t$).

b) $V = \mathcal{F}_k$, $\sigma\big((a_k)_{k\geq 1},(b_k)_{k\geq 1}\big) = \lim_{k\to\infty} a_k b_b$

122) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis B und $\sigma : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Beweisen Sie, daß die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

(i) Es gibt ein $v \in V$, $v \neq \mathbf{o}$, sodaß $\sigma(v,w) = 0$ für alle $w \in V$.

(ii) Es gibt ein $w \in V$, $w \neq \mathbf{o}$, sodaß $\sigma(v,w) = 0$ für alle $v \in V$.

(iii) Es gilt $\det[\sigma]_B = 0$.

Eine Bilinearform, die eine (und damit alle drei) der Bedingungen aus dem letzten Beispiel erfüllt, wird ausgeartet genannt.

123) Beweisen Sie: Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\sigma : V \times V \to K$ eine Bilinearform. Beweisen Sie: Wenn $\dim_K V$ ungerade und σ schiefsymmetrisch ist, dann ist σ ausgeartet.

124) Für die quadratische Form $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ finde man eine Basis $B = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ des $\mathbb{R}^4$, die den Anforderungen von Korollar 10.8 genügt. (D.h. $\sigma(v_i,v_i) \in \{-1,0,1\}$ für $1 \leq i \leq 4$ und $\sigma(v_i,v_j) = 0$ für $1 \leq i,j \leq 4$ und $i \neq j$.) Bringen Sie q auf eine Summe von Quadraten und bestimmen Sie Rang und Positivitätsindex (wobei $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^t$).

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$$

125) Es sei $A \in M_n(K) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ symmetrisch. Beweisen Sie: Wenn A positiv definit ist, gilt $a_{ii} > 0$ für $1 \leq i \leq n$. Gilt eine analoge Aussage für negativ definite Matrizen?

126) Bestimmen Sie, ob die folgenden quadratischen Formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv bzw. negativ definit bzw. semidefinit oder indefinit sind (wobei $x = (x_1,x_2,x_3)^t$):

a) $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$

b) $q(x) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_3^2$

c) $q(x) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2$

127) Bestimmen Sie (z.B. mit Hilfe von Hauptminoren) ob die folgenden quadratischen Formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv oder negativ definit sind:

a) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$
b) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_3$
c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$

128) Es sei $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie: Wenn $b^2 - 4ac > 0$ ist q indefinit.

129) Es sei K ein Körper. Beweisen Sie: Für alle $p, q \in K[X]$ gelten

a) $\operatorname{grad}(p + q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$
b) $\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q$

Beachten Sie, daß dabei die folgenden Konventionen gelten: Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$-\infty < n \quad \text{und} \quad -\infty + n = n + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

130) Führen Sie Division mit Rest für die folgenden Polynome $f, g \in \mathbb{R}[X]$ durch, d.h. finden Sie die Polynome $q, r \in \mathbb{R}[X]$, die $f = qg + r$ und $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g$ erfüllen:

a) $f(X) = X^6 + X^5 - X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 2X - 4$,
$g(X) = X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2$
b) $f(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 2X - 4$, $g(X) = X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6$
c) $f(X) = X^8 - 1$, $g(X) = X^2 - 1$

131) Beweisen Sie:

a) $A^2 - (\operatorname{Spur} A)A + (\det A)I_2 = 0$ für alle $A \in M_2(K)$.
b) Für alle $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\Big((\operatorname{Spur} A)I_2 - A\Big).$$

c) Wenn K unendlich viele Elemente enthält, gibt es unendlich viele $A \in M_2(K)$, die $A^2 - I_2 = 0$ erfüllen.

132) a) Beweisen Sie: Mit den Notationen von Korollar 11.8 gilt $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$ für $1 \leq i \leq s$.
b) Folgern Sie aus Korollar 11.8: Wenn $p \in \mathbb{R}[X]$ ungeraden Grad hat, besitzt p eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

133) Es sei V ein K-Vekorraum, $\varphi : V \to V$ linear und $p \in K[X]$. Beweisen Sie: Wenn $\lambda \in K$ Eigenwert von φ ist, ist $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(\varphi)$.

134) Beweisen Sie, daß die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist. (Wobei zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ ähnlich genannt werden, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt, sodaß $B = SAS^{-1}$.)

135) Berechnen Sie für die folgenden Matrizen aus $M_3(\mathbb{R})$ das charakteristische Polynom, ihre Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

136) Es sei $A \in M_n(K)$ mit charakteristischem Polynom

$$p(X) = \det(A - XI_n) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_x X + a_0.$$

Beweisen Sie, daß

a) $a_n = (-1)^n$ b) $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{Spur} A$ c) $a_0 = \det A$

137) Beweisen Sie, daß jedes Polynom $(-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_x X + a_0 \in K[X]$ das charakteristische Polynom einer Matrix aus $M_n(K)$ ist. Hinweis: Benützen Sie Beispiel 80a) als Ausgangspunkt.

138) Beweisen Sie: Eine Matrix $A \in M_n(K)$ ist genau dann invertierbar, wenn $0 (\in K)$ nicht Eigenwert von A ist.

139) Es sei $A \in M_n(K)$ invertierbar. Beweisen Sie:

a) Wenn $\lambda \in K$ Eigenwert von A ist, ist λ^{-1} Eigenwert von A^{-1}.

b) A und A^{-1} besitzen die selben Eigenvektoren.

140) Beweisen Sie, daß die Matrizen $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ diagonalisierbar sind. Finden Sie dazu ähnliche Diagonalmatrizen sowie $S, T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, derart daß $S^{-1}AS$ bzw. $T^{-1}BT$ mit diesen Diagonalmatrizen übereinstimmen.

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{b)}\quad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

141) Man berechne A^n (mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig) für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

142) Diagonalisieren Sie die folgende symmetrische Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ und finden Sie eine orthogonale Matrix S, sodaß $S^{-1}AS$ Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

143) Finden Sie die Jordansche Normalform der beiden Matrizen A und B und finden Sie invertierbare Matrizen S und T, sodaß $S^{-1}AS$ bzw. $T^{-1}AT$ Jordansche Normalform besitzen.

$$\text{a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

144) Beweisen Sie, daß die Matrizen A_n mit $n \in \mathbb{N}$ alle zueinander ähnlich sind, wobei

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beweisen Sie, daß alle A_n die selbe Jordansche Normalform besitzen.

145) Beweisen Sie: Wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, sodaß die Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ die Gleichung $A^r = I_n$ erfüllt, dann ist A diagonalisierbar. (Hinweis: Beweisen Sie, daß die Jordansche Normalform J von A eine Diagonalmatrix sein muß, indem Sie $A = SJS^{-1}$ zur r-ten Potenz erheben.)

146) Beweisen Sie: a) Die Gerade durch die beiden Punkte $\binom{a_1}{a_2}$ und $\binom{b_1}{b_2}$ (mit $a_1 \neq b_1$) besitzt die Gleichung

$$x_2 - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x_1 - a_1).$$

b) Die Gerade mit den Abschnitten a bzw. b auf der x_1- bzw. x_2-Achse besitzt die Gleichung

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1.$$

147) Beweisen Sie: Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander.

148) Beweisen Sie: Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden einander in einem Punkt (dem Umkreismittelpunkt).

149) Überprüfen Sie, daß man folgendermaßen Parameterdarstellungen für die jeweilige Kurve zweiter Ordnung erhält:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $x_1 = \frac{2t}{t^2+1}$, $x_2 = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ (mit $t \in \mathbb{R}$),

b) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $x_1 = a\frac{2t}{t^2+1}$, $x_2 = b\frac{t^2-1}{t^2+1}$ (mit $t \in \mathbb{R}$),

c) $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $x_1 = a\frac{t^2+1}{t^2-1}$, $x_2 = b\frac{2t}{t^2-1}$ (mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$).

Welche Punkte der jeweiligen Kurve werden durch die Parametrisierungen nicht dargestellt? Wie könnten die Parametrisierungen gewonnen worden sein?

150) Beweisen Sie: Alle Punkte $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$, für die das Produkt der Abstände von den beiden festen Punkten $\binom{a}{0}$ und $\binom{-a}{0}$ den Wert a^2 besitzt, genügen der Lemniskatengleichung

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2a^2(x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Wie sieht diese Kurve aus? (Die Beantwortung dieser letzten Frage ist wesentlich leichter, wenn man einen Computer zu Hilfe nimmt.)

151) a) Finden Sie die Gleichung der Ellipse, auf der die beiden Punkte $\binom{10}{5}$ und $\binom{6}{13}$ liegen (und deren Hauptachsen auf den Koordinatenachsen liegen).
b) Finden Sie die Gleichung der Hyperbel mit den Asymptoten $x_2 = \pm\frac{3}{2}x_1$, die durch den Punkt $\binom{7}{3\sqrt{10}}$ verläuft.

152) Finden Sie die Gleichung der Tangenten aus dem Punkt $\binom{0}{3}$ an

a) die Ellipse aus dem vorangegangenen Beispiel,

b) die Hyperbel aus dem vorangegangenen Beispiel,

c) die Parabel $x_2^2 = 4x_1$.

153) Finden Sie die Gleichung der beiden Tangenten aus dem Punkt $\binom{4}{-1}$ an die Kurve zweiter Ordnung $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 - 14x_2 + 1 = 0$. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks, das von der Polare und den beiden Tangenten bestimmt wird.

154) Um welche Kurven zweiter Ordnung handelt es sich?

a) $8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 - 10x_2 - 319 = 0$

b) $6x_1x_2 + 8x_2^2 - 12x_1 - 26x_2 + 11 = 0$

c) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0$

d) $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_1 - 12x_2 + 3 = 0$

e) $x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 4x_1 - 12x_2 + 4 = 0$