Übungen zu Angewandte Mathematik für das Lehramt, SS 2019

Christoph Baxa

1) Es sei $a > 0$ und die beiden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} ax^3 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie, wo diese beiden Fuktionen ein- bzw. zweimal differenzierbar sind und bestimmen Sie an diesen Stellen die erste bzw. zweite Ableitung. Welcher der beiden Möglichkeiten ist beim Anschluß einer Kurve an eine gerade Bahnstrecke sinnvoller (und warum)?

2) Eine empirisch ermittelte Formel für das Wachstum kleiner Kinder lautet

$$h(t) = 5,104 \cdot t + 9,22 \cdot \log t + 70,23.$$

Dabei ist t das Alter des Kindes (in Jahren) und soll $\frac{1}{4} \leq t \leq 6$ erfüllen und $h(t)$ die durchschnittliche Körpergröße von Kindern im Alter von t Jahren (in cm). Bestimmen Sie die Wachstumsrate $h'(t)$. In welchem Alter ist die Wachstumsrate in diesem Bereich am größten?

3) Es sollen zylinderförmige Blechdosen vom Volumen V hergestellt werden. Wie groß muss man den Radius r von Boden und Deckel und die Höhe h der Dosen wählen, damit möglichst wenig Blech für die Herstellung benötigt wird?

4) Aus einem Baumstamm, den wir uns als Zylinder mit kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d vorstellen, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gesägt werden, und zwar derart, dass möglichst wenig Abfall entsteht bzw. das Volumen des Balkens möglichst groß ist. (D.h. hat der Querschnitt des Balkens die Seitenlängen b und h, so soll $b \cdot h$ möglichst groß sein.) Wie müssen die Abmessungen des Balkens gewählt werden?

5) Wie im letzten Beispiel soll aus einem Baumstamm mit kreisförmigen Querschnitt ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gesägt werden, diesmal allerdings so, dass der Balken möglichst tragfähig ist. Die Statik lehrt, dass zu diesem Zweck $b \cdot h^2$ möglichst groß sein soll. Wie müssen die Abmessungen des Balkens gewählt werden?

6) Um eine Größe zu bestimmen, werden n (fehlerbehaftete) Messungen durchgeführt, die die Messergebnisse $a_1, \ldots, a_n$ liefern. Um eine möglichst gute Annäherung an den realen Wert zu erhalten, verwendet man jenen Wert x, für den die Funktion

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$

einen möglichst kleinen Wert annimmt (*Methode der kleinsten Quadrate*). Welcher Wert ist das?

7) Bei der Herstellung eines batteriebetriebenen Geräts werden Batterien mit vorgegebener Spannung U und Innenwiderstand R_i verwendet. Wie groß muss der Verbraucherwiderstand R gewählt werden, damit die Verbraucherleistung P, die durch

$$P = \frac{U^2 R}{(R + R_i)^2}$$

gegeben ist, maximal ist?

8) Um ihren Laichplatz zu erreichen, der sich s km stromaufwärts befindet, schwimmen Lachse gegen den Strom. Der Fluss habe konstante Fliessgeschwindigkeit v und die Lachse sollen sich mit Relativgeschwindigkeit r (bezogen auf das Wasser) bewegen. Biologen sind durch Messungen zum Schluss gekommen, dass die Schwimmleistung P der Lachse proportional zu r^λ ist, wobei $\lambda > 2$ eine Konstante ist. Bei welcher Relativgeschwindigkeit $r > v$ ist die Energie W, die die Lachse aufwenden müssen, minimal, wenn W zu

$$\frac{s}{r - v} \cdot r^\lambda$$

proportional ist?

Berechnen Sie in den Beispielen 9 bis 12 die gesuchten Stammfunktionen mit Hilfe partieller Integration. Geben Sie an, auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ Ihre Lösung Stammfunktion ist und kontrollieren Sie die Korrektheit der Lösung durch Differenzieren. Verwenden Sie dabei nur Bleistift und Papier.

9)

a) $\displaystyle\int x \cdot \cos x \, dx$ b) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x} \, dx$ c) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sin x \, dx$

10)

a) $\displaystyle\int x \cdot \log x \, dx$ b) $\displaystyle\int \sin^2 x \, dx$ c) $\displaystyle\int \log x \, dx$

11)

a) $\displaystyle\int x \cdot e^{\alpha x}\,dx$ b) $\displaystyle\int x \cdot \cos^2 x\,dx$ c) $\displaystyle\int x^3 \log x\,dx$

12)

a) $\displaystyle\int x^2 e^x\,dx$ b) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x\,dx$ c) $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx$

Berechnen Sie in den Beispielen 13 bis 18 die gesuchten Stammfunktionen mittels Substitution. Geben Sie an, auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ Ihre Lösung Stammfunktion ist und kontrollieren Sie die Korrektheit der Lösung durch Differenzieren. Verwenden Sie dabei nur Bleistift und Papier.

13)

a) $\displaystyle\int (5x-3)^7\,dx$ b) $\displaystyle\int (2-3x)^{-2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin(3x)\,dx$

14)

a) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$ c) $\displaystyle\int \sqrt{1+x}\,dx$

15)

a) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$ b) $\displaystyle\int x \cdot \cos(x^2)\,dx$ c) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)dx$

16)

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-5}$ b) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx$

17)

a) $\displaystyle\int \sin^4 x \cdot \cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int x\sqrt{3x-2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

18)

a) $\displaystyle\int \tan x\,dx$ b) $\displaystyle\int x \cdot e^{-x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx$

Berechnen Sie in den Beispielen 19 bis 27 die gesuchten Stammfunktionen mittels Partialbruchzerlegung. Geben Sie an, auf welcher Teilmenge von $\mathbb{R}$ Ihre Lösung Stammfunktion ist. Verwenden Sie dabei andere Hilfsmittel als Bleistift und Papier höchstens um eine Nullstelle eines Polynom dritten Grades zu finden.

19)

$$\text{a)} \int \frac{dx}{1-x^2} \qquad \text{b)} \int \frac{x+5}{x^2+x}\,dx \qquad \text{c)} \int \frac{5x-8}{x^2-2x-8}\,dx$$

20)

$$\text{a)} \int \frac{x-8}{2x^2-7x+3}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{7x^2-25x-20}{x^2-4x}\,dx \qquad \text{c)} \int \frac{2x^2-11}{x^2-x-12}\,dx$$

21)

$$\text{a)} \int \frac{3x^3-8x^2-7x+22}{x^2-x-6}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{12x^4+16x^3-7x^2-10x+7}{6x^2+5x-6}\,dx$$

22)

$$\text{a)} \int \frac{2x^2-4x-1}{x^3-x}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{5x+1}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$$

23)

$$\text{a)} \int \frac{15x+3}{x^3-39x-70}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{3x^2-26x+21}{2x^3-5x^2-21x+36}\,dx$$

24)

$$\text{a)} \int \frac{4x^3+21x^2+22x-6}{x^3+5x^2+6x}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{3x^4+11x^3-13x^2-40x+4}{x^3+4x^2-4x-16}\,dx$$

25)

$$\text{a)} \int \frac{x}{x^2-2x+1}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{4x^2+9x+4}{x^3+4x^2+4x}\,dx$$

26)

$$\text{a)} \int \frac{x^2-9x+28}{x^3+x^2-16x+20}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{33x^2+34x+6}{18x^3+3x^2-4x-1}\,dx$$

27)

$$\text{a)} \int \frac{x^3+x^2-2x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{2x^4-5x^3-27x^2+74x+43}{x^3-2x^2-15x+36}\,dx$$

28) Zwei Studenten finden als Ergebnis für die Aufgabe, die Stammfunktion von

$$f(x) = \sin(2x)$$

zu finden, die beiden Lösungen

$$F_1(x) = \sin^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Da sie beide keinen Fehler finden können, schließen sie daraus, dass

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

Eine hinzugekommene Studentin wird misstrauisch und meint, dass das so nicht stimmen könne. Wer von den dreien hat recht bzw. unrecht? Falls sich doch ein Fehler eingeschlichen haben sollte, wie korrigiert man ihn?

29) Überprüfen Sie, dass (für gegebenes $a > 0$)

$$y(x) = a\log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

(mit Konstante $C \in \mathbb{R}$) Lösung der Differentialgleichung $y' = -\sqrt{a^2 - x^2}/x$ ist. Auf welchem Intervall gilt das?

30) Einige Cholerabakterien werden in eine Nährlösung gebracht. Nach 30 Minuten befinden sich 329 Bakterien in der Lösung, 60 Minuten später sind es bereits 2684. Wie groß ist die Verdopplungszeit der Cholerabakterien? Wie viele Bakterien wird es 5 Stunden nach Beginn des Experiments in der Nährlösung geben?

31) Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ seien $n(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Es ist nun sinnvoll anzunehmen, dass die Anzahl dn der Atome, die in einem kleinen Zeitraum dt zerfallen, zur vorhandenen Anzahl $n(t)$ und zum Zeitraum dt proportional sind. D.h. es soll $dn = -\lambda n(t)\,dt$ gelten, wobei $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante der Substanz genannt wird. (In der Gleichung muss $-\lambda$ stehen, da die Anzahl der Atome abnimmt.) Man erhält daraus die Differentialgleichung $\frac{dn}{dt} = -\lambda n$, die radioaktiven Zerfall beschreibt.

a) Zeigen Sie, dass $n(t) = Ce^{-\lambda t}$ (mit beliebiger Konstante C) eine Lösung ist.

b) Geben Sie eine Interpretation der Konstante C.

c) Beweisen Sie, dass sich die Anzahl der Atome in der *Halbwertszeit* $\tau = \frac{\log 2}{\lambda}$ halbiert.

32) Innerhalb eines Jahres zerfallen circa 2,3% des radioaktive Isotops Cäsium-137. Wie groß sind seine Zerfallskonstante und seine Halbwertszeit?

33) Die Halbwertszeit von Kalium-42 beträgt 12,45 Stunden.

a) Wie viel Prozent der Ausgangsmenge werden nach 10 Stunden noch vorhanden sein?
b) Nach wie vielen Stunden werden 5% der Ausgangsmenge zerfallen sein?

34) Bei der Explosion von Atombomben wird das radioaktive Strontium-90 freigesetzt, dessen Aufnahme für Menschen und Tiere gefährlich ist. Es hat eine Halbwertszeit von 28 Jahren. Angenommen, nach einem Atombombentest befindet sich hundertmal so viel Strontium-90 am Testgelände wie normal. Wie lange dauert es, bis das Gelände wieder für Menschen bewohnbar ist (d.h. bis die Menge auf das normale Niveau abgesunken ist)?

35) Die Radiokarbonmethode zur Altersbestimmung basiert auf folgenden Tatsachen:

• Neben dem nicht radioaktiven Isotop Kohlenstoff-12 gibt es noch das radioaktive Isotop Kohlenstoff-14, dessen Anteil in der Atmosphäre konstant ist. (Kohlenstoff-14 zerfällt ständig, wird aber stets nachgebildet.)
• In lebenden Organismen treten beide Isotope auf. Die Anteile der beiden Isotope sind dabei dieselben wie in der Atmosphäre, da stets Kohlenstoff aufgenommen und abgegeben wird.
• Sobald ein Organismus stirbt, findet kein Stoffaustausch mehr statt und der Anteil von Kohlenstoff-14 beginnt zu sinken, da es zerfällt, aber nicht mehr neu aufgenommen wird.
• Kohlenstoff-14 besitzt eine Zerfallskonstante von $\lambda = 0{,}00012/\text{Jahr}$.

Beweisen Sie: Findet man in einem Organismus das p-fache der Menge an Kohlenstoff-14, die sich zum Zeitpunkt seines Todes in ihm befunden hat (mit $0 < p < 1$), so beträgt die seit seinem Tod verstrichene Zeit

$$t = -\frac{\log p}{\lambda} = -\frac{\log p}{0{,}00012}\text{ Jahre.}$$

36) Es bezeichne $I(x)$ die Lichtintensität in einer Wassertiefe von x Metern. Für die Abnahme der Lichtintensität macht man den Ansatz $dI = -\lambda I(x)\,dx$ mit einem Absorptionskoeffizienten $\lambda > 0$.

a) Leiten Sie daraus das Lambertsche Gesetz $I(x) = I(0)e^{-\lambda x}$ her.
b) Für Tageslicht und halbwegs sauberes Seewasser ist $\lambda \approx 1{,}4\ \text{m}^{-1}$. Wie viel Prozent der Lichtintensität $I(0)$ an der Wasseroberfläche sind in einer Tiefe von 1, 2, 3 und 4 Metern noch vorhanden?
c) Wie b) für trüberes Seewasser mit $\lambda \approx 2\ \text{m}^{-1}$.

37) Überprüfen Sie, dass (für gegebene $K, \lambda > 0$ und $P(0) > 0$)

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P(0)} - 1\right)e^{-\lambda K t}}$$

Lösung der logistischen Differentialgleichung $P' = \lambda P(K - P)$ ist.

38) Für Fruchtfliegen fand R. Pearl um 1920 experimentell die folgende Gleichung für ihre Populationsgröße $P(t)$ zum Zeitpunkt t und deren Änderungsrate dP/dt:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2$$

Dabei wird t in Tagen gemessen. Angenommen, die Population bestand am Beginn aus 10 Fruchtfliegen.

a) Wie groß ist die Population nach 12 Tagen?
b) Bei welcher Population und nach welcher Zeit beginnt die Wachstumsrate abzunehmen?
c) Welche Populationsgröße wird die Population langfristig erreichen?

39) Beweisen Sie, dass die Formeln für den freien Fall mit Luftwiderstand, d.h.

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{\rho}\right)e^{-\frac{\rho}{m}t} + \frac{mg}{\rho}$$

und

$$x(t) = \frac{m}{\rho}\left(v_0 - \frac{mg}{\rho}\right)\left(1 - e^{-\frac{\rho}{m}t}\right) + \frac{mg}{\rho}t$$

für $\rho \to 0+$ in die Formeln für den freien Fall ohne Luftwiderstand übergehen, d.h.

$$v(t) = gt + v_0 \qquad \text{und} \qquad x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Regel von de l'Hospital.

Überprüfen Sie in den nachfolgenden Beispielen 40 bis 49, dass die Funktion $y(x)$ Lösung der angegebenen Differentialgleichung bzw. des angegebenen Anfangswertproblems ist und geben Sie das Intervall I an, auf dem $y(x)$ Lösung ist. Die Größen C, C_1, C_2 bezeichnen beliebig wählbare reelle Konstanten.

40) $y' = 2xy$, $y(x) = Ce^{x^2}$.

41) $y' = 2xy + 1$, $y(x) = Ce^{x^2} + e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.
Warum wird die Lösung mit Hilfe eines Integrals ausgedrückt?

42) $y' + 4xy - 8x = 0$, $y(x) = Ce^{-2x^2} + 2$.

43) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$, $y(x) = \dfrac{2}{2 - x^2}$.

44) $y^2y' - x^2 = 0$, $y(0) = 2$, $y(x) = (x^3 + 8)^{1/3}$.

45) $y'' + y = 0$, $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

46) $y'' - y = 0$, $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

47) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$.

48) $x^2y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $y(x) = x - x \log x$.

49) $y'' - 4y' + 4y + 8\sin(2x) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$, $y(x) = 3e^{2x} - 2xe^{2x} - \cos(2x)$.

50) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$. Überprüfen Sie, dass sowohl $y_1(x)$ als auch $y_2(x)$ Lösung dieses Anfangswertproblems sind, wobei $y_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$y_2(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Picard-Lindelöf?

51) Beweisen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = 0$ die in Bsp. 45 angegebene Gestalt hat bzw. dass jede Lösung genauer die folgende Gestalt hat:

$$y(x) = y(0) \cdot \cos x + y'(0) \cdot \sin x$$

Hinweis. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Angenommen, f ist Lösung der Differentialgleichung.

a) Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h(x) = \big(f(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^2$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $h'(x) = 0$ gilt.
b) Folgern Sie aus a), dass $h(x) = h(0) = \big(f(0)\big)^2 + \big(f'(0)\big)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
c) Folgern Sie die Beh. im Fall $f(0) = f'(0) = 0$ indem Sie $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zeigen.
d) Zeigen Sie die Beh. für den Fall, dass $f(0)$ und $f'(0)$ nicht beide 0 sind, indem Sie die Funktion $g(x) = f(x) - f(0) \cdot \cos x - f'(0) \cdot \sin x$ betrachten. Zeigen Sie, dass g die Differentialgleichung erfüllt und wenden Sie Teil c) an.

52) a) Beweisen Sie die Beziehung $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, indem Sie das vorangegangene Beispiel auf die Funktion $y(x) = \cos(-x)$ anwenden.
b) Ebenso für die Beziehung $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

53) a) Beweisen Sie den Summensatz $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, indem Sie das vorletzte Beispiel auf die Funktion $y(x) = \sin(x+\beta)$ anwenden.
b) Ebenso für den Summensatz $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

54) Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Funktionen. Die Differentialgleichung

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

besitze auf dem Intervall I die beiden Lösungen y_1 und y_2. Beweisen Sie, dass dann auch jede Linearkombination $C_1y_1 + C_2y_2$ mit beliebigem $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Lösung dieser Differentialgleichung auf dem Intervall I ist.

Skizzieren Sie in den nachfolgenden Beispielen 55 bis 58 (mit Hilfe des Richtungsfelds oder eines Computerprogramms) einige Isoklinen und Lösungen der angegebenen Differentialgleichung.

55) $y' = y/x$

56) $y' = x/y$

57) $y' = y/x^2$

58) $y' = x^2 + y^2$

Skizzieren Sie in den nachfolgenden beiden Beispielen das Richtungsfeld und einige Lösungen der angegebenen Differentialgleichung. Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte und stellen Sie fest, in welchem Bereich sie abstoßend bzw. anziehend wirken.

59) $y' = y(y-1)(y-2)$

60) $y' = (y-2)(y-3)^2$

Finden Sie in den nachfolgenden Beispielen 61 bis 64 die Lösung des angegebenen Anfangswertproblems. Geben Sie das Intervall an, auf dem die Lösung definiert ist.

61) $y' = 2xy$, $y(0) = 7$

62) $y' = y/x^2$, $y(-1) = 2$

63) $y' = \tan x \cdot y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$

64) $y' = y/(1 - x^2)$, $y(0) = \sqrt{2/3}$

65) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

a) Beweisen Sie: Ist $y_{p1} : I \to \mathbb{R}$ partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y' + a(x) \cdot y = b_1(x)$$

und $y_{p2} : I \to \mathbb{R}$ partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y' + a(x) \cdot y = b_2(x),$$

so ist $y_{p1} + y_{p2} : I \to \mathbb{R}$ partikuläre Lösung der Differentialgleichung

$$y' + a(x) \cdot y = b_1(x) + b_2(x).$$

b) Verallgemeinern Sie Teil a) für n stetige Funktionen $b_1, \dots, b_n : I \to \mathbb{R}$.

Finden Sie in den nachfolgenden Beispielen 66 bis 74 die allgemeine Lösung der angegebenen Differentialgleichung. Falls ein Intervall angegeben ist, finden Sie die Lösung in diesem Intervall.

Hinweise. 1. Ist die Diffentialgleichung in der Form $a(x) \cdot y' = b(x) \cdot y + c(x)$ gegeben, so kann man sie durch Division durch $a(x)$ auf eine Gestalt zurückführen, die in der Vorlesung behandelt wurde. Allerdings muss man sich dabei auf Intervalle beschränken, in denen $a(x)$ keine Nullstellen besitzt.

2. Es kann manchmal praktisch sein, bei der Lösung Bsp. 65) zu verwenden.

66) $y' + 4xy - 8x = 0$

67) $y' = 2xy + 1$

68) $xy' = 4y + x^5$ für $x > 0$

69) $y' = \tan x \cdot y - 2 \sin x$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

70) $x^2 y' = 1 - y$ für $x < 0$

71) $xy' = -y + e^x$ für $x > 0$

72) $y' = 1 - 2\cot x \cdot y$ für $0 < x < \pi$

73) $y' = -2y + x + \sin x$

74) $y' = -y + xe^{-x} + 1$

Finden Sie in den nachfolgenden Beispielen 75 bis 84 die Lösung des angegebenen Anfangswertproblems.

75) $y' = 2xy + x$, $y(0) = 1$

76) $y' = \frac{1}{1-x} y + x - 1$, $y(2) = 0$

77) $(x + 1)y' = -(x + 2)y + 2\sin x$, $y(0) = 2$

78) $y' = \dfrac{x - 4xy}{x^2 + 1}$, $y(1) = 1$

79) $y' = \frac{2}{x} y + 2x^3$, $y(2) = 20$

80) $(1 + x)y' + 2y = 2x$, $y(0) = 1$

81) $y' = \frac{y}{x} + x^2$, $y(1) = 1$

82) $xy' = x - y - xy\cot x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

83) $y' = \frac{1}{x-1} y - x + x^2$, $y(0) = 3$

84) $y' = 2xy + 1$, $y(0) = 0$

85) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \gamma > 0$. Beweisen Sie: Ist y Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \alpha y = \beta e^{-\gamma x},$$

so gilt $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$. *Hinweis.* Unterscheiden Sie die beiden Fälle $\alpha \neq \gamma$ und $\alpha = \gamma$.

86) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' + y = b(x)$, $y(0) = 0$ mit der nur stückweise stetigen Funktion

$$b(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Überprüfen Sie, dass

$$y(x) = \begin{cases} 2(1 - e^{-x}) & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 2(e-1)e^{-x} & \text{für } x > 1, \end{cases}$$

eine Lösung ist, die im Punkt $x = 1$ stetig (und sonst überall differenzierbar) ist. Finden Sie diese Lösung mit Hilfe von Satz 8 bzw. Korollar 9.

87) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' + a(x) \cdot y = 0$, $y(0) = 1$ mit der nur stückweise stetigen Funktion

$$a(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Finden Sie eine Lösung, die im Punkt $x = 1$ stetig (und sonst überall differenzierbar) ist.

88) Die Größe einer Altersgruppe vermindere sich gemäß der Gompertzschen Überlebensfunktion. Berechnen Sie jene Zeit τ, nach deren Ablauf sich die Altersgruppe halbiert hat. (D.h. drücken Sie τ, derart dass $N(t+\tau) = N(t)/2$ gilt, als Funktion von t aus.) Beweisen (und interpretieren) Sie die Relation $\lim_{t\to+\infty} \tau(t) = 0$.

89) Eine Studentin oder ein Student vergisst nach erfolgreichem Absolvieren einer Prüfung nach und nach einiges des zuvor beherrschten Stoffs. Es sei $p(t)$ der Prozentsatz des nach der Zeit t noch beherrschten Stoffs. D.h. die Anfangsbedingung ist $p(0) = 100$. Wir nehmen (etwas optimistisch) an, dass ein Prozentsatz b (mit $0 < b < 100$) des Stoffs so grundlegend ist, dass er nie vergessen wird. Weiters nehmen wir an, dass die Vergessensrate $p'(t)$ proportional zur Menge des noch vergessbaren Stoffs, d.h. zu $p(t) - b$, ist. Formulieren und lösen Sie das sich daraus ergebende Anfangswertproblem und skizzieren Sie die Lösung.

90) Eine Studentin will das erfolgreiche Absolvieren einer schweren Prüfung stilvoll mit Champagner feiern. Sie holt ein Flasche aus dem Keller (in dem die Temperatur konstant 14°C beträgt) und stellt sie in einen Kübel mit Eiswasser. Da sie den Champagner bei der perfekten Temperatur von 7°C genießen will, misst sie nach einer halben Stunde die Temperatur und stellt fest, dass er auf 10°C abgekühlt ist. Wie lange muss sie noch warten, bis der Champagner richtig temperiert ist?

91) Ein Student will sich, nachdem er endlich alle Übungsbeispiele gerechnet hat, mit einer Flasche Bier belohnen. Kaum hat er die Flasche aus dem Kühlschrank geholt, in dem die Temperatur konstant 7°C beträgt, kommt der Chemiestudent von nebenan in die Küche (die aus Kostengründen auf nur 19°C aufgeheizt wird) und will ihm geschlagene 90 Minuten lang die faszinierend Struktur des Gifts Maitotoxin näherbringen. Als der Chemiestudent endlich wieder gegangen ist, misst er die Temperatur des vergessenen Biers und stellt betrübt fest, dass es sich auf inakzeptable 15°C erwärmt hat. Für wie lange müsste er das Bier in den Kühlschrank stellen, um es auf eine erträgliche Temperatur von 8°C abzukühlen?

92) Beweisen Sie für einen Newtonschen Abkühlungsprozess $\vartheta(t) = \vartheta_A + (\vartheta_0 - \vartheta_A)e^{-kt}$ die Beziehung

$$\vartheta\left(t + \frac{\log 2}{k}\right) = \frac{1}{2}\Big(\vartheta_A + \vartheta(t)\Big)$$

und vergleichen Sie sie mit der Halbwertszeit bei radioaktivem Zerfall.

93) Wir haben die Differentialgleichung $\vartheta' = -k(\vartheta - \vartheta_A)$ des Newtonschen Abkühlungsgesetzes in der Vorlesung nur für konstante Aussentemperatur ϑ_A gelöst. Tatsächlich spricht nichts dagegen, sie für eine variable Aussentemperatur $\vartheta_A(t)$ (die stetig von t abhängt) zu betrachten. Beschreiben Sie die Lösung der Differentialgleichung $\vartheta' = -k\big(\vartheta - \vartheta_A(t)\big)$ mit Hilfe von Korollar 9.

94) In einer kühlen Herbstnacht fällt die Lufttemperatur von 5°C um 18 Uhr linear auf −2°C um 6 Uhr morgens. Ein unvorsichtiger Hausbesitzer hat eine Wasserleitung im Außenbereich am Abend nicht entleert. Um 18 Uhr beträgt die Wassertemperatur in der Leitung ebenfalls 5°C. Berechnen Sie, wie die Wassertemperatur in der Leitung im Lauf der Nacht fällt (zumindest bis sie den Gefrierpunkt erreicht). Überprüfen Sie, dass das Wasser in der Leitung um circa 4 Uhr morgens zu gefrieren beginnt, wenn man für k den Wert $0,73$/Stunde verwendet.

Finden Sie in den nachfolgenden beiden Beispielen die allgemeine Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

95) $y' = x/y$

96) $y' = -x/y$

Finden Sie in den nachfolgenden Beispielen 97 bis 101 die Lösung des angegebenen Anfangswertproblems. (Zusatzaufgabe für alle hinreichend Motivierten: Finden Sie das Intervall (α, β), auf dem die Lösung nach dem Beweis von Satz 10 definiert ist.)

97) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$

98) $y^2 y' - x^2 = 0$, $y(0) = 2$

99) $y' = -x^2/y^3$, $y(0) = 1$ bzw. $y(0) = -1$

100) $y' = e^y \sin x$, $y(0) = 0$

101) $x(y^2+1) + y(x^2+1)y' = 0$, $y(0) = 1$

102) Die Differentialgleichung $dP/dt = \alpha P^\beta$ (mit Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 1$) ist als Beschreibung für explosionsartige Bevölkerungsvermehrung in Entwicklungsländern vorgeschlagen worden.

a) Lösen Sie diese Differentialgleichung unter Annahme der Anfangsbedingung $P(0) = P_0$.
b) Zeigen Sie, dass die Bevölkerung – würde die Differentialgleichung die Bevölkerungsentwicklung langfristig beschreiben – schon in endlicher Zeit unendlich groß werden würde. D.h. beweisen Sie die Existenz eines $T > 0$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{t \to T-} P(t) = +\infty$.

103) Es bezeichne $h(t)$ die Höhe einer Pflanze zur Zeit t. Bei vielen Pflanzen ist die Änderungsrate $h'(t)$ der Höhe im Frühstadium ihres Wachstums direkt proportional zu $h(t)$ und indirekt proportional zu t^3. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, die das Wachstum einer solchen Pflanze im Frühstadium beschreibt und lösen Sie sie unter der Annahme, dass die Maßeinheiten so gewählt sind, dass $h(1) = 1$.

104) Es bezeichne $V(t)$ das Volumen einer Flüssigkeit, die während der Zeit $t \geq 0$ durch einen Filter läuft. Die Änderungsrate dV/dt kann unter geeigneten Annahmen durch die Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P}{R + \alpha P^\beta V}$$

beschrieben werden. (Dabei sind R, P, α, β positive Konstanten, die verschiedene technische Aspekte des Filtervorgangs wie Druck und Widerstand beschreiben.) Lösen Sie diese Differentialgleichung unter der Annahme $V(0) = 0$.

105) Es bezeichne $W(x)$ die Wirkung, die x Einheiten eines Medikaments erzielen. (Dabei kann $W(x)$ z.B. die Verringerung der Anzahl von Krankheitserregern oder die Senkung des Blutdrucks messen.) Zwischen Dosis x des Medikaments und Wirkung besteht erfahrungsgemäß oft eine Relation der Gestalt

$$W(x) = \frac{Sx}{x+A},$$

die man als Dosis-Wirkungs-Kurve bezeichnet. Dabei ist $W(0) = 0$ und A und S sind zwei positive Konstanten, wobei S Wirkungssättigung genannt wird. Zeigen Sie, dass W einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen genügt und überprüfen Sie die Relation $\lim_{x\to+\infty} W(x) = S$.

106) Eine Differentialgleichung für die Vermehrung von Mikroorganismen in mikrobiologischen Reaktoren lautet

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k_1 c}{k_2 + c}.$$

Dabei bezeichnen k_1 und k_2 zwei positive Konstanten und $c(t)$ die Konzentration der Mikroorganismen in Abhängigkeit von der Zeit t. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $c(t)$ (d.h. drücken Sie t als Funktion von c aus).

107) Kohlenmonoxid steht mit Kohlenstoff und Kohlendioxid gemäß der Reaktionsgleichung $2\,\mathrm{CO} \rightleftharpoons \mathrm{C} + \mathrm{CO_2}$ im Gleichgewicht. Bezeichnet $u(t)$ die Konzentration von CO zur Zeit t, so kann eine Differentialgleichung der Gestalt

$$\frac{du}{dt} = k(a-u)(b+u)$$

(mit positiven Konstanten k, a und b) zu ihrer Beschreibung verwendet werden. Lösen Sie diese Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $u(0) = u_0$.

108) Eine Population von Protozoen erhält ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ pro Sekunde a^2 Bakterien als Futter (mit einer Konstante $a > 0$). Die Protozoen fressen die Bakterien mit einer Geschwindigkeit, die proportional zum Quadrat der Bakterienzahl $x(t)$ zum Zeitpunkt t ist. Der Proportionalitätsfaktor werde dabei mit b^2 bezeichnet (mit einer Konstante $b > 0$). Stellen Sie eine Differentialgleichung für $x(t)$ auf und lösen Sie sie. Berechnen Sie den Gleichgewichtszustand $\lim_{t\to+\infty} x(t)$ der Bakterienzahl. *Hinweis.* Die Quadrate bei den Konstanten dienen nur dazu, die Rechnung einfacher zu gestalten.

109) Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Feststoff S in einem Lösungsmittel L auflöst, ist proportional zur noch unaufgelösten Menge von S und zur Differenz von Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffs.

Zur Zeit $t_0 = 0$ werden in einen Behälter mit 100 kg des Lösungsmittels 10 kg des Feststoffs S gegeben. Die Sättigungskonzentration sei $1/4$. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Menge $u(t)$ des zur Zeit $t \geq 0$ gelösten Stoffs auf und lösen Sie sie (d.h. drücken Sie u als Funktion von t und der Proportionalitätskonstante k aus). *Hinweis.* In diesem Beispiel wird die Konzentration in Masse gelöster Feststoff pro Masse Lösungsmittel gemessen.

Finden Sie in den nachfolgenden Beispielen 110 bis 115 die Orthogonaltrajektorien der angegebenen Familie von Kurven. Der Parameter c variiert über die reellen Zahlen (oder eine sinnvoll gewählte Teilmenge davon).

110) $y = \frac{x}{2} + c$

111) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = c$

112) $x^2 + 2y^2 = c$

113) $e^x + e^{-y} = c$

114) $y = cx^3$

115) $y^2 = cx^3$