Übungen zu Analysis in einer Variable für das Lehramt
SS 2016

Christoph Baxa

1) Drei Lehramtsstudenten machen gemeinsam Urlaub im Süden. Da sie wenig Geld haben, suchen sie eine billige Unterkunft. Tatsächlich finden sie ein günstiges Hotel, in dem sie gemeinsam um 30 Euro übernachten können. Jeder der drei bezahlt dem Rezeptionisten 10 Euro und sie gehen auf ihr Zimmer. Wenig später erkundigt sich der Hotelbesitzer beim Rezeptionisten nach der Buchungslage. Als er von den drei Studenten hört, macht er den Rezeptionisten darauf aufmerksam, dass das Hotel das Zimmer für Studenten sogar um nur 25 Euro anbietet. Also macht sich der Rezeptionist mit 5 Euro auf den Weg zu den Studenten. Unterwegs überlegt er sich, dass man die 5 Euro ja gar nicht vernünftig auf drei Personen aufteilen kann. Also gibt er jedem der drei nur einen Euro zurück und behält zwei Euro als Trinkgeld. Nun hat jeder der Studenten 9 Euro für das Zimmer bezahlt und der Rezeptionist hat 2 Euro. Das macht in Summe 29 Euro. Wo ist der 30. Euro geblieben?

2) Welches der drei Symbole $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ oder $\Longleftrightarrow$ kann man in den folgenden Aussagen an der Stelle der drei Punkte $\ldots$ einsetzen, sodass eine wahre Aussage entsteht?

a) Heute ist Dienstag ... Morgen ist Mittwoch
b) Es regnet ... Die Straße ist nass
c) Matura bestanden ... Alle Noten im Zeugnis sind positiv
d) Matura bestanden ... Mathematiknote ist positiv
e) Die ganze Zahl a ist durch 3 teilbar ... Die Ziffernsumme von a ist durch 3 teilbar
f) Die ganze Zahl a ist durch 9 teilbar ... Die Ziffernsumme von a ist durch 3 teilbar
g) $a = 3 \ldots\ a^2 = 9$

3) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis. Wir wollen zeigen, dass $1 = 2$ gilt. Dazu wählen wir zwei beliebige Zahlen a und b mit der Eigenschaft $a = b$.

$$\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab \\
a^2 + a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 &= a^2 + ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 + ab - 2ab \\
2a^2 - 2ab &= a^2 - ab \\
2 \cdot (a^2 - ab) &= 1 \cdot (a^2 - ab) \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

4) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis. Wir wollen zeigen, dass $4 = 5$ gilt.

$$
\begin{aligned}
-20 &= -20 \\
16 - 36 &= 25 - 45 \\
16 - 36 + \tfrac{81}{4} &= 25 - 45 + \tfrac{81}{4} \\
4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2 &= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \tfrac{9}{2} + (\tfrac{9}{2})^2 \\
(4 - \tfrac{9}{2})^2 &= (5 - \tfrac{9}{2})^2 \\
4 - \tfrac{9}{2} &= 5 - \tfrac{9}{2} \\
4 &= 5
\end{aligned}
$$

5) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Alle natürlichen Zahlen sind gleich.
Beweis. Wir zeigen $1 = 2 = \cdots = n$ durch Induktion.
Induktionsanfang: Die Behauptung stimmt für $n = 1$, denn $1 = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Es gilt $1 = 2 = \cdots = n$.
Induktionsschritt: Aus $n - 1 = n$ folgt $n = n + 1$ und daher $1 = 2 = \cdots = n = n + 1$.

6) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Je n beliebige Punkte in einer Ebene liegen stets auf einer Gerade.
Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion.
Induktionsanfang: Die Behauptung ist für $n = 1$ und $n = 2$ offensichtlich korrekt.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für n Punkte schon gezeigt.
Induktionsschritt: Gegeben seien die $n + 1$ Punkte $P_1, \dots, P_{n+1}$ in der Ebene. Nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_1, \dots, P_n$ auf einer Gerade g. Ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung liegen die Punkte $P_2, \dots, P_{n+1}$ auf einer Gerade h. Da die beiden Punkte P_2 und P_n auf beiden Geraden g und h liegen, muss $g = h$ gelten und daher liegen $P_1, \dots, P_{n+1}$ alle auf einer Gerade.

7) Mit $A(n)$ werde die Aussage $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass $A(n + 1)$ aus $A(n)$ folgt. Ist die Aussage $A(n)$ wahr?

8) Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.
Behauptung. Die größte natürliche Zahl N ist 1.
Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen $N \neq 1$. Da $0 < 1$ ist $N \neq 0$ und daher $N > 1$. Daraus folgt $N^2 > N$, was der Definition von N widerspricht.

Beweisen Sie für einen Körper K nur mit Hilfe der Körperaxiome bzw. den in der Vorlesung daraus abgeleiteten Folgerungen:

9) Das Einselement $1(\in K)$ ist eindeutig bestimmt.

10) Zu gegebenem $a \in K$, $a \neq 0$ ist das multiplikative Inverse $\frac{1}{a}$ eindeutig bestimmt.

11) Zu $a, b \in K$, $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in K$, sodass $a \cdot x = b$.

12) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

13) Für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ gilt $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

14) Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

15) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

16) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

17) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, c, d \neq 0$ gilt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

18) Für alle $a, b, c, d \in K$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

19) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist.

20) Beweisen Sie für $a, b \in K$ (wobei K ein angeordneter Körper sein soll):
a) Wenn $a, b > 0$ dann $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.
b) Wenn $a, b < 0$ dann $a + b < 0$ und $a \cdot b > 0$.

21) Beweisen Sie: Wenn $0 < a < b$ dann $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

22) Beweisen Sie für $a, b, c \in K$ (wobei K ein angeordneter Körper sein soll):
a) Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ dann $a \leq c$.
b) Wenn $a \leq b$ und $c > 0$ dann $a \cdot c \leq b \cdot c$.
c) Wenn $a \leq b$ und $c < 0$ dann $a \cdot c \geq b \cdot c$.
d) Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$ dann $a = b$.

23) Beweisen Sie, dass es kein $x \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $x^2 = 3$ gibt (d.h. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$).

24) Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ gilt, dass $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

25) Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$ gilt.

26) Beweisen Sie: Für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt die Dreiecksungleichung

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

27) Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Gleichungen:

$$\text{a) } \max\{a, b\} = \frac{a + b + |b - a|}{2} \qquad \text{b) } \min\{a, b\} = \frac{a + b - |b - a|}{2}$$

28) Sind die folgenden Mengen nach unten bzw. oben beschränkt? Wenn ja, was ist ihr Infimum bzw. Supremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum bzw. Maximum?

a) $(-1, 1)$ b) $[-3, 2)$ c) $(-3, 2) \cap [1, +\infty)$

d) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ e) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

29) a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n = [n, +\infty)$. Beweisen Sie $I_{n+1} \subseteq I_n$ für $n \geq 0$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \varnothing$.
b) Ebenso für $I_n = (0, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Widersprechen diese Ergebnisse dem Intervallschachtelungsprinzip?

30) Es seien $A = [3, 11]$, $B = \{-1, 2, 18\}$, $C = [0, 1) \cup \{2\}$ und $D = (-\infty, -100]$. Berechnen Sie $2A$, $-2B$, $3C$, $-3D$, $A + B$, $A + C$, $A + D$, $B + C$, $B + D$ und $C + C$.

31) Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ und $M, N \neq \varnothing$. Beweisen Sie: Wenn M und N nach oben beschränkt sind, ist auch $M \cup N$ nach oben beschränkt und es gilt

$$\sup(M \cup N) = \max\{\sup M, \sup N\}.$$

32) Es sei $a < 0$ und $p \in \mathbb{N}$ ungerade. Beweisen Sie: Es gibt genau ein $x < 0$ mit der Eigenschaft $x^p = a$. Verwenden Sie keine Dedekindschen Schnitte, sondern führen Sie die Behauptung auf Satz 12 aus der Vorlesung zurück.

33) Beweisen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \le k \le n$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \le k < n$

Geben Sie für beide Aussagen einen Beweis mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten und einen mittels ihrer kombinatorischen Interpretation.

34) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$,

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

Können Sie eine kombinatorische Interpretation dieser Identitäten geben?

35) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

36) Es sei $a > 0$ und $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$ und $p < n$. Beweisen Sie

$$\sqrt[n]{a^p} \le 1 + \frac{p}{n}(a-1).$$

37) Zeigen Sie (für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$), dass

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 \le n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

38) Beweisen Sie die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Ist $x \ge -1$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so gilt $(1+x)^n \ge 1 + nx$.

39) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie direkt aus der Grenzwertdefinition

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+a} = 0.$$

(Die Folgenglieder sind für $n > |a|$ sicher definiert.)

40) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \ge 1}$ für

a) $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{4n^3 + 1}$ b) $a_n = \dfrac{(n+1)^2 - n^2}{n}$

41) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ für

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{4n^4 - n + 2}{2n^4 + 2n^2 + n} \qquad \text{b)}\quad a_n = \frac{n^3 + n}{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n + 1}$$

42) Es seien $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}$, $a_p \neq 0$ und $b_q \neq 0$. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} a_p/b_q & \text{falls } p = q, \\ 0 & \text{falls } p < q. \end{cases}$$

Bemerkung. Man kann relativ leicht zeigen, dass die Folgenglieder für genügend großes n sicher definiert sind. Sie können diese Tatsache ohne Beweis verwenden.

43) Berechnen Sie:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2n^2 - 1} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2} q^n \quad \text{für } |q| < 1$$

44) Berechnen Sie:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$$

45) Berechnen Sie:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \right) \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Hinweis. Verwenden Sie $\frac{1}{m\cdot(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$ in Teil a).

46) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Berechen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n^p}$. Was können Sie aus den Ergebnissen über den Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ folgern, wenn die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ für fast alle n die Relation $n^{-p} < a_n < n^p$ erfüllt?

47) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$ dann gilt auch $a \geq 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

48) Beweisen Sie:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2} \qquad \text{b)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n\right) = \frac{1}{3}$$

49) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \sqrt{\big(1 - \tfrac{a}{n}\big)\big(1 - \tfrac{b}{n}\big)}\Big) = \frac{a+b}{2}.$$

Ab welchem Index sind die Folgenglieder sicher definiert?

50) Beweisen Sie: Wenn $0 \le a \le b \le c$ dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$. Geben Sie eine analoge Aussage für p Zahlen $0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_p$ an (und beweisen Sie sie).

51) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und p eine Polynomfunktion ist, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(a).$$

52) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dann gelten

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}.$$

Hinweis. Ein früheres Beispiel ist sehr hilfreich.

53) Beweisen Sie: Wenn $a_n \neq 0$ für alle $n \ge 1$ und es ein $q \in (0, 1)$ gibt, derart dass $|a_{n+1}/a_n| \le q$ für fast alle n, dann ist $(a_n)_{n\ge1}$ eine Nullfolge.

54) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ beliebig fest gewählt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

55) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$.

56) Die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ sei folgendermaßen iterativ definiert: $a_1 := \sqrt{2}$, $a_2 := \sqrt{a_1 + 2}$, allgemein $a_{n+1} := \sqrt{a_n + 2}$ für $n \ge 1$. Beweisen Sie:

a) Die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ wächst monoton,
b) Die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ ist durch 2 nach oben beschränkt,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Hinweis. Verwenden Sie Induktion nach n für die Teile a) und b).

57) Beweisen Sie: Ist die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ konvergent, so ist die Folge $(a_{n+1} - a_n)_{n\ge1}$ eine Nullfolge. Gilt die Umkehrung?

58) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\ge1}$ mit

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

eine Cauchyfolge (und daher konvergent) ist.

59) Zeigen Sie, dass es $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $a^b \in \mathbb{Q}$ gibt. *Hinweis.* Experimentieren Sie mit $\sqrt{2}$. Beachten Sie, dass Sie a und b nicht explizit angeben müssen.

60) Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$ (mit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$ (mit $r > 0$ rational)

61) Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ sei konvergent. Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) = +\infty$

62) Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

a) $$\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha > 0, \\ -\infty & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$ b) $$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$$

63) Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (2n^2 + 3n - 7) = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3 - 5n) = +\infty$

64) Bestimmen Sie die Häufungspunkte und $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$:

a) $$a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$ b) $$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \geq 1, \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \geq 0, \\ 2 & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \geq 0. \end{cases}$$

65) Finden Sie eine unbeschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, die als Häufungspunkte die drei Zahlen 163, $\frac{22}{7}$ und e besitzt.

66) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - 3^{-n^2})$

67) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5n^2-3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5-4n^2}{n^6+n}$

68) Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

69) Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen mit Hilfe von Teleskopsummen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

70) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

71) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$

72) Sind die folgenden Reihen konvergent bzw. absolut konvergent?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+13}}$

73) Konvergieren die folgenden Reihen (wobei in Teil c) $a \in \mathbb{R}$ sein soll)?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^{n-1}}$

74) Konvergieren die folgenden Reihen (wobei in Teil a) $a \geq 0$ sein soll)?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2})^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

75) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots$$

durch Angabe einer konvergenten Majorante. Überprüfen Sie, dass die Konvergenz dieser Reihe mit Hilfe des Wurzelkriteriums, nicht aber mit dem Quotientenkriterium erkennbar ist.

76) Es seien $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q$ b) $\operatorname{grad}(p + q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$

Dabei gelten die Konventionen $-\infty + n = n + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ sowie $\max\{-\infty, n\} = n$ bzw. $\max\{-\infty, -\infty\} = -\infty$ und $-\infty \leq n$ bzw. $-\infty \leq -\infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

77) (Lagrangesches Interpolationspolynom) Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ (die nicht verschieden zu sein brauchen). Beweisen Sie, dass durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{(x - a_0) \cdots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \cdots (x - a_n)}{(a_k - a_0) \cdots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \cdots (a_k - a_n)}$$

eine Polynomfunktion mit den Eigenschaften $\operatorname{grad} p \leq n$ und $p(a_k) = b_k$ (für $0 \leq k \leq n$) gegeben ist.

78) (Gaußklammer) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ (d.h. $[x]$ ist die größte ganze Zahl $\leq x$). Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$. Ist die Funktion f gerade bzw. ungerade? Finden und beweisen Sie eine Formel, die $[-x]$ durch $[x]$ ausdrückt.

79) a) Es sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion mit $\operatorname{grad} p \geq 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p. Beweisen Sie, dass es eine Polynomfunktion q mit $\operatorname{grad} q = \operatorname{grad} p - 1$ und der Eigenschaft $p(x) = (x - \alpha) \cdot q(x)$ gibt. *Hinweis.* Verwenden Sie Polynomdivision mit Rest.

b) Benützen Sie Teil a), um zu zeigen: Ist $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $\operatorname{grad} p \geq 1$, so besitzt p nur endlich viele Nullstellen.

80) Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für die charakteristischen Funktionen der Mengen $A \cap B$ und $A \cup B$:

a) $c_{A \cap B} = c_A \cdot c_B$ b) $c_{A \cup B} = c_A + c_B - c_{A \cap B}$

81) Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ wird die symmetrische Differenz $A \triangle B$ definiert als

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Drücken Sie $c_{A \triangle B}$ durch c_A und c_B aus und beweisen Sie Ihre Behauptung.

82) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $-D = D$. Beweisen Sie:

a) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei gerade (bzw. ungerade) Funktionen, so sind $f \pm g : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls zwei gerade (bzw. ungerade) Funktionen.
b) Ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sowohl gerade als auch ungerade, so ist $f = 0$ (d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in D$).

83) Beweisen Sie: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich auf eindeutige Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben. *Hinweis.* Verwenden Sie für die Existenz die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

84) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \leq 2, \\ 3x - 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Geben Sie einen detaillierten Beweis dafür, dass f im Punkt 2 stetig ist (d.h. argumentieren Sie mit $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$).

85) Berechnen Sie (soferne sie existieren) die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1} \qquad\qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\Big)$$

86) Beweisen Sie

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

87) Es sei $b>1$. Beweisen Sie:

a) Für alle $x,y>0$ gilt ${}_b\log\frac{x}{y}={}_b\log x-{}_b\log y$.
b) Für alle $x>0$ und alle $y\in\mathbb{R}$ gilt ${}_b\log x^y=y\cdot{}_b\log x$.

88) Beweisen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$. *Hinweis.* In der Vorlesung wurde $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ bewiesen.

89) a) Beweisen Sie: Wenn die Abbildung $f:[a,b]\to[a,b]$ stetig ist, besitzt sie einen Fixpunkt $\xi\in[a,b]$. *Hinweis.* Betrachten Sie die Abbildung $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x$.
b) Geben Sie Beispiele für stetige Funktionen $f:I\to I$ ohne Fixpunkt an, wobei I ein Intervall, aber entweder nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt ist.

90) Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot c_{\mathbb{Q}}(x)$. Beweisen Sie, dass f im Punkt 0 differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(0)$.

91) Es sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi\in I$ und $f_1,\dots,f_n:I\to\mathbb{R}$ seien alle in ξ differenzierbar. Beweisen Sie: Dann ist auch $f_1\cdots f_n:I\to\mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und es gilt

$$(f_1f_2\cdots f_n)'(\xi)=(f_1'f_2\cdots f_n)(\xi)+(f_1f_2'f_3\cdots f_n)(\xi)+\cdots+(f_1\cdots f_{n-1}f_n')(\xi).$$

92) Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen f:

a) $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+2}$ (mit $x\neq-2$) b) $f(x)=e^{2x+3}$ c) $f(x)=x\log x$ (mit $x>0$)

93) Differenzieren Sie die Funktion $f(x)=x^x$ (mit $x>0$).

94) Beweisen Sie, ausgehend von der Gleichung $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$, mittels Differenzieren die folgenden Identitäten für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}\quad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}=0\quad \text{c)}\ \sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}$$

95) Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die folgenden Funktionen (wobei gelten soll, dass $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

a) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.
b) $f(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots + n^2x^n$.

96) Es sei $0 < a \leq 1$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass die Polynomfunktion $p(x) = ax^3 - 3ax + b$ (mit $b \in \mathbb{R}$ beliebig) im Intervall $[-a, a]$ höchstens eine Nullstelle besitzt.

97) Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wo nimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (x - a_j)^2$ ein Miniumum an?

98) Welche Bedingung müssen $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein lokales Maximum besitzt?

99) Welche Bedingung muss $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 + 3x + 5$ kein lokales Extremum besitzt?

100) Finden Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion
$$f : [1, 7] \to \mathbb{R},\ f(x) = 7x^5 + x^3 + \tfrac{x-1}{x}.$$

101) Bestimmen Sie das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, das dem Einheitskreis eingeschrieben werden kann.

102) Bestimmen Sie das achsenparallele Rechteck mit maximalem Umfang, das der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eingeschrieben werden kann.

Die folgenden Beispiele beschäftigen sich mit den Hyperbelfunktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert werden:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} \quad (\text{für } x \neq 0)$$

103) a) Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.
b) Beweisen Sie $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (Diese Relation erklärt die Namen. Welcher Teil der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ wird durch $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ parametrisiert?)

104) Beweisen Sie:

a) $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$, was ist $\frac{d}{dx}\cosh x$? Was ist $\frac{d^n}{dx^n}\sinh x$, was $\frac{d^n}{dx^n}\cosh x$?

b) $\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$, was ist $\frac{d}{dx}\coth x$?

105) a) Beweisen Sie: $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

b) Finden Sie eine analoge Formel für $\sinh(x+y)$

106) Beweisen Sie:

a) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ und $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$,

b) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

107) Beweisen Sie

$$\text{a)}\ \cosh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \text{b)}\ \sinh^2\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

108) Beweisen Sie

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

109) Definieren Sie die Umkehrfunktionen zu sinh, cosh und tanh, genannt Arsinh (lies: Area sinus hyperbolicus), Arcosh und Artanh auf $\mathbb{R}$, $[1, +\infty)$ und $(-1, 1)$, skizieren Sie ihre Graphen und berechnen Sie ihre Ableitungen.

110) Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ für $x \in \mathbb{R}$,

b) $\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \geq 1$,

c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$ für $x \in (-1,1)$.

111) Überprüfen Sie durch Differenzieren auf den drei Intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, +\infty)$, dass

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Auf welcher Menge ist die Gleichung $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Artanh} x$ gültig?

112) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\ \int x\sqrt{x+1}\,dx \qquad \text{b)}\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\,dx \qquad \text{c)}\ \int \sqrt[3]{x+1}\,(x-1)^2\,dx$$

113) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_0^1 x(2x-1)^5\,dx \qquad \text{b)} \int_0^2 (x^2+1)\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx$$

114) Verwenden Sie partielle Integration, um Rekursionsformeln zur Berechnung der folgenden beiden Stammfunktionen herzuleiten:

a) $\int x^n \sinh x\,dx$ b) $\int x^n \cosh x\,dx$

115) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)} \int \sqrt{2x+3}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}} \qquad \text{c)} \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

116) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)} \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{b)} \int x^{-1/3}\big(x^{2/3}+1\big)^{1/3}\,dx \qquad \text{c)} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

117) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(2-x^3)^3} \qquad \text{c)} \int_1^8 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$$

118) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen mit Hilfe der Substitution $x = \sinh t$:

$$\text{a)} \int \sqrt{x^2+1}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}$$

119) Zeigen Sie die folgenden Formeln:

a) $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}$,

b) $\int f'(x)\big(f(x)\big)^n\,dx = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}$,

c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ wobei $f(x) \neq 0$.

120) Beweisen Sie die folgende Formel und finden Sie eine analoge Formel für $\cos x + \cos y$:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

121) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$ b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$

122) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ b) $\sin(3x) = -4\sin^3 x + 3\sin x$

123) a) Zeigen Sie mit Hilfe des vorletzten Beispiels $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe des vorangegangenen Beispiels $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ und folgern Sie daraus $\sin(\pi/6) = 1/2$.
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b), dass $\cos(\pi/3) = 1/2$ und $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

124) Beweisen Sie:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Leiten Sie Formeln für $\tan(x-y)$, $\tan(2x)$ und $\cot(x+y)$ ab.

125) Beweisen Sie: a) Für $-1 \leq x \leq 1$ gilt $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$.
b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$.

126) Suchen Sie den Fehler in der folgenden Argumentation: Da

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin(2x) = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big)$$

sind sowohl $x \mapsto \sin^2 x$ als auch $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$ Stammfunktion von $x \mapsto \sin(2x)$, also muss $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ gelten.

127) Finden Sie Rekursionsformeln für die folgenden Stammfunktionen (wobei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$):

a) $\int \cos^n x\, dx$ b) $\int x^n \cos x\, dx$

128) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \arcsin x\, dx$ b) $\int \arctan x\, dx$

129) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\displaystyle\int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\, dx$ (für $\alpha \neq 0$) b) $\displaystyle\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\, dx$ (für $|\alpha| \neq |\beta|$)

130) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{\tan x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$