Übungen zu Algebra für LAK, SS 2013

Christoph Baxa

1) Entscheiden Sie, welche der Gruppenaxiome von $(G, \circ)$ erfüllt werden:

a) $G = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a + b + ab$ b) $G = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a - b$ c) $G = \mathbb{R}$, $a \circ b = a^2 - b^2$

2) Es sei $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ wobei $a \neq 0\}$. Bildet G mit $\circ$ (d.h. der Komposition von Funktionen) eine Gruppe? Wenn ja, ist diese abelsch?

3) Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen mit der Matrizenmultiplikation Gruppen sind (wobei K einen Körper bezeichnet):

a) $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\} = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}$,
b) $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$,
c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$,
d) $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^t\}$.

4) a) Beweisen Sie, dass $\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, (x, y) \neq (0, 0)\}$ mit der üblichen Multiplikation reeller Zahlen eine abelsche Gruppe bildet.
b) Beweisen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.
c) Beweisen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

5) Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und $S_X = \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$. Ist $X = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man S_n statt $S_{\{1,\ldots,n\}}$.

a) Zeigen Sie, dass $(S_X, \circ)$ eine Gruppe ist ($\circ$ ist die Verknüpfung von Abbildungen).
b) Zeigen Sie $|S_n| = n!$.
c) Für welche n ist S_n abelsch? Begründen Sie Ihre Behauptung.

6) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) Erfüllt $a \in G$ die Beziehung $a \cdot a = a$, so ist $a = e$.
b) Für $a, b \in G$ existieren eindeutig bestimmte $x, y \in G$, derart dass $ax = b$ und $ya = b$

7) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie: Gilt $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist abelsch. Gilt auch die Umkehrung?

8) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) G ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^2 = a^2b^2$ für alle $a, b \in G$ gilt.
b) G ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ für alle $a, b \in G$ gilt.

9) Gegeben sei das Quadrat mit den Eckpunkten $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ und $(-1,-1)$ (im $\mathbb{R}^2$). Betrachten Sie die Menge $D_4^* = \{I, R, R^2, R^3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ von Bijektionen des Quadrats. Dabei bezeichne I die Identität, R die Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung, S_0 die Spiegelung an der Gerade $y = x$, S_1 die Spiegelung an der y-Achse, S_2 die Spiegelung an der Gerade $y = -x$ und S_3 die Spiegelung an der x-Achse.

a) Schreiben Sie eine Multiplikationstafel von D_4^*.
b) Beweisen Sie, dass D_4^*, versehen mit der Verknüpfung von Abbildungen, eine nicht-abelsche Gruppe bildet (die Symmetriegruppe des Quadrats).

10) Es bezeichne, analog zu Beispiel 8, D_3^* die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Finden Sie die Elemente von D_3^* und beweisen Sie analoge Eigenschaften wie im vorangegangene Beispiel. Kennen Sie eine Gruppe, deren Strukur der von D_3^* gleicht?

11) Es seien G und H Gruppen. Beweisen Sie:

a) $G \times H$ bildet mit der Verknüpfung $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ eine Gruppe.
b) Die Gruppe $G \times H$ ist genau dann abelsch, wenn G und H beide abelsch sind.

12) Es sei G eine Gruppe und H_1 und H_2 Untergruppen von G. Beweisen Sie, dass $H_1 \cap H_2$ ebenfalls Untergruppe von G ist.

13) a) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/p^n \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
b) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
c) Beweisen Sie, dass $\big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\big\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{1, -1\}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (mit der Matrizenmultiplikation) ist.

14) Schreiben Sie eine Multiplikationstafel der *Kleinschen Vierergruppe* $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und finden Sie alle Untergruppen von V_4.

Definition. Ist G eine Gruppe, so bezeichnet man

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa \text{ für alle } x \in G\}$$

als das Zentrum von G.

15) Es sei G eine Gruppe.

a) Beweisen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.
b) Welche Gestalt hat $Z(G)$ wenn G abelsch ist?

16) Bestimmen Sie a) $Z(S_3)$ und b) $Z\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\big)$.

17) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{32}^*$ von den Restklassen von 5 und -1 erzeugt wird.

18) Beweisen Sie, dass die Gruppe D_4^* (aus Beispiel 9) von R und S_0 erzeugt wird.
Hinweis. Zeigen Sie $D_4^* = \big\{R^j S_0^i \mid i \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2,3\}\big\}$.

19) Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente der Gruppen a) $\mathbb{Z}_{12}$ b) $\mathbb{Z}_{12}^*$ c) S_3.

20) Es sei G eine Gruppe und $a, b \in G$. Beweisen Sie

a) $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$, b) $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$, c) $\mathrm{ord}(bab^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$.

21) Es sei G eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass $H := \{a \in G \mid \mathrm{ord}(a) \text{ ist endlich}\}$ eine Untergruppe von G ist. Wie sieht die Untergruppe H aus, wenn $G = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\big\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen ist?

22) Betrachten Sie die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ mit der Matrizenmultiplikation und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{ord}(A) = 4$ und $\mathrm{ord}(B) = 3$ gilt, aber AB unendliche Ordnung besitzt.

23) a) Es sei G die Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$. Bestimmen Sie die Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich der Untergruppe $H = \{\overline{0}, \overline{4}\}$.
b) Es sei G die Gruppe $\{1, i, -1, -i\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen. Bestimmen Sie die Zerlegung von G in Nebenklassen bezüglich der Untergruppe $H = \{1, -1\}$.

24) Die Abbildungen $\sigma, \tau \in S_3$ seien gegeben durch $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ und $\sigma(3) = 1$ bzw. $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ und $\tau(3) = 3$. Betrachten Sie die Untergruppen $H = \{\varepsilon, \tau\}$ und $K = \{\varepsilon, \sigma, \sigma^2\}$ der Gruppe S_3 (wobei ε das neutrale Element von S_3 bezeichnen soll). Bestimmen Sie die Zerlegung von S_3 in Links- bzw. Rechtsnebenklassen nach H und K.

25) Es sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Beweisen Sie, dass sowohl die Links- als auch die Rechtsnebenklasse bezüglich der Untergruppe $\mathrm{SL}_n(K)$, in der A liegt, die Menge $\{B \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det B = \det A\}$ ist.

26) a) Welche der Untergruppen aus den Beispielen 23, 24 und 25 sind Normalteiler? Begründen Sie Ihre Behauptung mit Hilfe der Resultate aus diesen Beispielen.

b) Beweisen Sie, dass das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G Normalteiler von G ist.

27) Beweisen Sie, dass $\{I, R, R^2, R^3\}$ Normalteiler der Gruppe D_4^* (aus Beispiel 9) ist.

28) Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen $\varphi : G \to H$ Homomorphismen sind. Bestimmen Sie $\ker\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ und ob φ Monomorphismus, Epimorphismus bzw. Isomorphismus ist:

a) Die Gruppen G und H seien $\big((0,+\infty),\cdot\big)$ und $(\mathbb{R},+)$ und $\varphi(x) = \log x$.

b) Die Gruppen G und H seien $\big(M_n(K),+\big)$ und $(K,+)$ und $\varphi(A) = \mathrm{Spur}(A)$ (wobei K einen Körper bezeichnet).

c) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ und $\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot\big)$ und $\varphi(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

29) Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen $\varphi : G \to H$ Homomorphismen sind. Bestimmen Sie $\ker\varphi$ und $\operatorname{Im}\varphi$ und ob φ Monomorphismus, Epimorphismus bzw. Isomorphismus ist:

a) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{Z},+)$ und $\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot\big)$ und $\varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{R},+)$ und

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation und

$$\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

c) Die Gruppen G und H seien $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},+)$ und $(\mathbb{R},+)$ und $\varphi(m,n) = m + n\sqrt{2}$.

30) Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ist genau dann ein Endomorphismus wenn G abelsch ist,

b) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Endomorphismus wenn G abelsch ist.

31) Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) Ist U eine Untergruppe von G, so ist $\varphi(U)$ eine Untergruppe von H.

b) Ist U eine Untergruppe von H, so ist $\varphi^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G.

c) Ist U Normalteiler von H, so ist $\varphi^{-1}(U)$ Normalteiler von G.

32) Es sei G eine Gruppe und H Untergruppe von G. Beweisen Sie für alle $a \in G$, dass $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ eine Untergruppe von G ist und dass $H \cong aHa^{-1}$.

33) Welche der Gruppen $(S_4, \circ)$, $(D_4^*, \circ)$, $(A_4, \circ)$, $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$ und $\big(\{1, i, -1, -i\}, \cdot\big)$ sind zueinander isomorph? Geben Sie für zueinander isomorphe Gruppen einen Isomorphismus an bzw. begründen Sie, warum Gruppen nicht zueinander isomorph sind.

34) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_{25}^*, \cdot)$ eine zyklische Gruppe ist. *Hinweis.* Zeigen Sie $\mathbb{Z}_{25}^* = \langle \bar{2} \rangle$.

35) Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus S_9 als Produkt elementfremder Zyklen und bestimmen Sie ihr Signum.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(4\,5\,6) \circ (5\,6\,7) \circ (6\,7\,1) \circ (1\,2\,3) \circ (2\,3\,4) \circ (3\,4\,5)$

d) $(1\,4\,7\,6\,2) \circ (2\,4\,3) \circ (4\,5\,8\,1)$

36) Es sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein Zyklus und $\sigma \in S_n$ beliebig. Beweisen Sie, dass

$$\sigma \circ (i_1 \dots i_r) \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)\big).$$

37) Zeigen Sie, dass $S_n = \big\langle (1\,2), (1\,2 \dots n) \big\rangle$ für alle $n \geq 3$. *Hinweis.* Verwenden Sie das vorangegangene Beispiel und Korollar 29.

38) Es sei R ein Ring, $a, b, c \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie:

a) $a \cdot 0 = 0$ b) $a(-b) = -(ab)$ c) $(a - b)c = ac - bc$ d) $a(nb) = n(ab)$

39) Es sei R ein Ring, $a, b \in R$ mit der Eigenschaft $ab = ba$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Beweisen Sie den *binomischen Lehrsatz*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

40) Es sei R ein Ring und $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in R$. Beweisen Sie die *Abelsche Umformung*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} b_j + a_n \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

41) Es sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ quadratfrei (d.h. es gibt keine Primzahl p mit der Eigenschaft $p^2 \mid d$). Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

42) a) Beweisen Sie $\mathbb{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}$.
b) Zeigen Sie, dass $\pm(1+\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

43) Es seien R und S zwei Ringe. Beweisen Sie:

a) Versieht man $R \times S$ mit den Verknüpfungen
$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \text{ und } (r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 \cdot s_2),$$
so ist $(R \times S, +, \cdot)$ ein Ring.

b) Sind R und S Ringe mit 1, so ist auch $R \times S$ ein Ring mit 1.

c) Sind R und S kommutativ, so ist auch $R \times S$ kommutativ.

d) Sind R und S Ringe mit 1, so gilt $(R \times S)^* = R^* \times S^*$.

44) Es sei $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}$. Beweisen Sie:

a) Mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen ist $\mathbb{H}$ ein Ring mit 1.

b) Alle $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ sind invertierbar (wobei 0 die Nullmatrix bezeichnet).

c) Der Ring $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ist nicht kommutativ.

45) a) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/p^n \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ ein Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist. Ist es auch ein Ideal?
b) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ ein Unterring von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist. Ist es auch ein Ideal?

46) Ist $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Ideal von $M_2(\mathbb{R})$?

47) Es sei R ein Ring und I und J Ideale von R. Beweisen Sie, dass $I \cap J$ ebenfalls ein Ideal von R ist. Was erhält man im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$ und $J = n\mathbb{Z}$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}$)?

48) Es sei R ein Ring und I und J Ideale von R. Beweisen Sie, dass
$$I \cdot J := \{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \mid n \geq 0, x_1, \ldots, x_n \in I, y_1, \ldots, y_n \in J\}$$
ebenfalls ein Ideal von R ist. Was erhält man im Spezialfall $R = \mathbb{Z}$, $I = m\mathbb{Z}$ und $J = n\mathbb{Z}$ (mit $m, n \in \mathbb{Z}$)?

49) Es sei R ein kommutativer Ring und $a_1, \ldots, a_n \in R$. Beweisen Sie:

a) $a_1 R + \cdots + a_n R = \{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \mid x_1, \ldots, x_n \in R\}$ ist ein Ideal von R.

b) Ist R ein kommutativer Ring mit 1, dann gilt $a_1, \ldots, a_n \in a_1 R + \cdots + a_n R$.