

# Übungen Lineare Algebra und Geometrie 1, SS 2009

Christoph Baxa

**81)** Für welchen Wert von  $\alpha \in \mathbb{R}$  bilden die Lösungen des folgenden Gleichungssystems einen zweidimensionalen Teilraum?

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 13x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 &= 0\end{aligned}$$

**82)** Beweisen Sie, daß die symmetrische Gruppe  $S_3$  nicht abelsch ist. Hinweis: Finden Sie zwei bijektive Abbildungen  $\sigma, \tau : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ , die nicht kommutieren (bei denen es auf die Reihenfolge der Ausführung ankommt), d.h. für die  $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$  gilt.

**83)** Benützen Sie das vorangegangene Beispiel, um zu beweisen, daß die Gruppe  $S_n$  für  $n \geq 3$  nicht abelsch ist. Hinweis: Modifizieren Sie Ihre Lösung des letzten Beispiels. Sind die beiden Gruppen  $S_1$  und  $S_2$  abelsch?

**84)** Beweisen Sie: Sind  $\sigma, \tau \in S_n$ ,  $\sigma = (a_1, \dots, a_r)$  ist zyklisch und  $\tau$  besitzt die Eigenschaft  $\tau(a_i) = a_i$  für  $1 \leq i \leq r$ , so gilt  $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$  (d.h.  $\sigma$  und  $\tau$  kommutieren).

**85)** Es sei  $n \geq 2$  und  $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn } \sigma = 1\}$ . Zeigen Sie, daß  $(A_n, \circ)$  eine Gruppe bildet (die sogenannte alternierende Gruppe) und daß ihre Ordnung  $|A_n| = n!/2$  ist.

**86)** Berechnen Sie die folgenden Determinanten (mit Eintragungen aus  $\mathbb{R}$ ):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

**87)** Berechnen Sie die folgenden Determinanten (mit Eintragungen aus  $\mathbb{C}$  bzw.  $\mathbb{R}$ ):

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2i & 3 & 1-3i \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

**88)** Leiten Sie die Formel für die Determinante einer  $2 \times 2$  – Matrix sowohl mit Hilfe der Leibniz-Formel als auch mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes her.

**89)** Leiten Sie die Regel von Sarrus sowohl mit Hilfe der Leibniz-Formel als auch mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes her.

**90)** Zeigen Sie (mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$  beliebig):

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2$$

**91)** Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x + a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**92)** Zeigen Sie:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & (n-2)^2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = n!$$

**93)** Beweisen Sie (mit  $a_{ij} \in K$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n+1$ ):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - a_{1,n+1} & a_{12} - a_{1,n+1} & \cdots & a_{1n} - a_{1,n+1} \\ a_{21} - a_{2,n+1} & a_{22} - a_{2,n+1} & \cdots & a_{2n} - a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - a_{n,n+1} & a_{n2} - a_{n,n+1} & \cdots & a_{nn} - a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

**94)** Berechnen Sie die sogenannte Vandermondesche Determinante: Für  $n \geq 2$  gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

für alle  $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ . Hinweise: Die rechte Seite ist das Produkt über alle Paare  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ , die  $i < j$  erfüllen. Verwenden Sie Induktion nach  $n$ . Bringen Sie für den Induktionsschritt die erste Zeile auf die Gestalt  $(1, 0, \dots, 0)$ : Multiplizieren Sie dazu die  $(n-1)$ -te Spalte mit  $x_1$  und subtrahieren Sie sie von der  $n$ -ten. Dann multiplizieren Sie die  $(n-2)$ -te Spalte mit  $x_1$  und subtrahieren Sie sie von der  $(n-1)$ -ten, usw.

**95)** Es seien

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \in M_m(K)$$

und

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} \in M_{nm}(K).$$

Beweisen Sie

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = (\det A)(\det B).$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach der Größe der Matrix.

**96)** Beweisen Sie, daß  $SL_n(K)$  mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

**97)** a) Es sei  $A \in M_n(K)$  und  $\alpha \in K$ . Zeigen Sie  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ .

b) Es sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  schiefsymmetrisch (d.h.  $A^t = -A$ ). Beweisen Sie: Wenn  $n$  ungerade ist, gilt  $\det A = 0$ .

c) Es sei  $A \in M_n(\mathbb{R})$  invertierbar und  $A^{-1} = A^t$ . Beweisen Sie  $\det A \in \{+1, -1\}$ .

**98)** Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über  $\mathbb{R}$  mit Hilfe der Cramerschen Regel (sofern das möglich ist):

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \text{a) } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \\ \text{b) } 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 10 \end{array}$$

**99)** Lösen Sie die Gleichungssysteme aus Bsp. 80) nochmals mit Hilfe der Cramerschen Regel (sofern das möglich ist).

**100)** Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen (sofern sie existieren):

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

**101)** Lösen Sie mit Hilfe von Satz 6.14 nochmals Bsp. 50).

**102)** Es sei  $A \in M_n(K)$  symmetrisch (d.h.  $A^t = A$ ) und invertierbar. Zeigen Sie, daß dann auch  $A^{-1}$  symmetrisch ist.

**103)** Für welche Werte von  $x \in \mathbb{C}$  sind die folgenden Matrizen invertierbar? Geben Sie die Inversen an (sofern sie existieren).

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

**104)** Es seien  $A, B \in M_3(\mathbb{R})$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Lösung  $X \in M_3(\mathbb{R})$  der Gleichung  $AX + B = 0$  (sofern eine solche existiert).

**105)** Es sei  $n \geq 2$  und  $A, B \in M_n(K)$  seien invertierbar. Beweisen Sie:

- a)  $(A \cdot B)^\# = B^\# \cdot A^\#$                       b)  $\det(A^\#) = (\det A)^{n-1}$   
 c)  $(A^\#)^\# = (\det A)^{n-2} A$                       d)  $(A^{-1})^\# = (A^\#)^{-1}$

**106)** Beweisen Sie: Ist  $V = \mathbb{R}^3$  (über  $\mathbb{R}$ ) und  $W$  eine Ebene, die den Nullpunkt enthält, so gilt  $V/W \cong \mathbb{R}$ .

**107)** Beweisen Sie: Ist  $V = \mathbb{R}^3$  (über  $\mathbb{R}$ ) und  $W$  eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht, so gilt  $V/W \cong \mathbb{R}^2$ .

**108)** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $V_1, \dots, V_n$  Teilräume von  $V$ . Beweisen Sie: Wenn  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ , so ist  $V/V_i \cong V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n$  für  $1 \leq i \leq n$ .

**109)** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U$  ein Teilraum von  $V$ . Beweisen Sie:

- a) Wenn  $W$  Teilraum von  $V$  ist und die Eigenschaft  $U \subseteq W$  besitzt, dann ist  $W/U$  Teilraum von  $V/U$ .  
 b) Ist  $\overline{W}$  Teilraum von  $V/U$ , so gibt es einen Teilraum  $W$  von  $V$  mit der Eigenschaft  $U \subseteq W$ , derart daß  $\overline{W} = W/U$ .

Eine (endliche oder unendliche) Folge

$$\dots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n} V_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \dots$$

von  $K$ -Vektorräumen  $\dots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}, \dots$  und linearen Abbildungen  $\varphi_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$  heißt exakte Sequenz wenn  $\text{Bild } \varphi_{i-1} = \text{Kern } \varphi_i$  für alle  $i$  gilt.

**110)** Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Dabei sind nicht beschriebene lineare Abbildungen jeweils als die einzig mögliche lineare Abbildung zu interpretieren.

- a)  $\{\mathbf{o}\} \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} W$  ist exakte Sequenz  $\iff \varphi$  ist injektiv  
 b)  $V \xrightarrow{\varphi} W \longrightarrow \{\mathbf{o}\}$  ist exakte Sequenz  $\iff \varphi$  ist surjektiv  
 c)  $\{\mathbf{o}\} \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} W \longrightarrow \{\mathbf{o}\}$  ist exakte Sequenz  $\iff \varphi$  ist ein Isomorphismus

**111)** Es sei

$$\{\mathbf{o}\} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \{\mathbf{o}\}$$

eine exakte Sequenz. Beweisen Sie:  $\varphi$  ist injektiv,  $\psi$  ist surjektiv und es gilt  $V/\varphi(U) \cong W$ .

**112)** Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume,  $U$  ein Teilraum von  $V$  und

$$L_U := \{\varphi \in L(V, W) \mid U \subseteq \text{Kern } \varphi\}.$$

Beweisen Sie: a)  $L_U$  ist ein Teilraum von  $L(V, W)$ .

b)  $L(V, W)/L_U \cong L(U, W)$

c)  $L_U \cong L(V/U, W)$

**113)** Gegeben sei  $V = \mathbb{C}^3$  über  $\mathbb{C}$  mit der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finden Sie eine explizite Formel für das lineare Funktional  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ , das durch

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1, \quad f \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

gegeben ist und drücken Sie  $f$  als Linearkombination der dualen Basis  $B^*$  von  $V^*$  aus.

**114)** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $f \in V^* \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

a) Bestimmen Sie Bild  $f$  und  $\dim_K \text{Kern } f$ .

b) Beweisen Sie  $V = (\text{Kern } f) \oplus [v]$ , wobei  $v \in V \setminus \text{Kern } f$  beliebig sei.

**115)** Es sei  $V = P_2(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie, daß durch  $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$  eine Basis von  $V^*$  gegeben ist, wobei (jeweils für  $p \in P_2(\mathbb{R})$ )

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx, \quad f_3(p) = \int_0^3 p(x) dx$$

sein soll. Finden Sie diejenige Basis  $B$  von  $V$ , zu der  $B^*$  duale Basis ist.

**116)** Gegeben seien die komplexen Vektorräume  $V = \mathbb{C}^3$  und  $W = \mathbb{C}^2$  und die lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$ ,  $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_1 + ix_3 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie die transponierte Abbildung  $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$  und ihre Matrixdarstellung bezüglich der zu den Standardbasen dualen Basen.

**117)** Beweisen Sie:

a) Sind  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $\varphi, \psi : V \rightarrow W$  zwei lineare Abbildungen, so gilt  $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$ .

b) Sind  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume,  $\varphi : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $\alpha \in K$ , so gilt  $(\alpha\varphi)^* = \alpha \cdot \varphi^*$ .



2)  $(a_i)_{i \geq 0} \cdot (b_i)_{i \geq 0} = (\sum_{k,l \geq 0, k+l=i} a_k b_l)_{i \geq 0}$ , d.h.

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots)$$

3) Für  $\alpha \in K$  sei  $\alpha \cdot (a_i)_{i \geq 0} = (\alpha a_i)_{i \geq 0}$ , d.h.

$$\alpha \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$$

4) Der Grad von  $(a_i)_{i \geq 0}$  wird definiert als  $\max\{i \geq 0 \mid a_i \neq 0\}$ , ergänzend definiert man den Grad von  $(0, 0, 0, \dots)$  durch  $-\infty$ .

5) Schließlich setzt man  $X := (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ , d.h.

$$X = (a_i)_{i \geq 0} \text{ mit } a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ und } a_i = 0 \text{ für alle } i \geq 2.$$

6) Die Menge aller derartigen Polynome wird mit  $K[X]$  bezeichnet.

**125)** Beweisen Sie:

- $K[X]$  bildet mit den in 1) und 2) definierten Verknüpfungen einen kommutativen Ring mit 1.
- $K[X]$  bildet mit den in 1) und 3) definierten Verknüpfungen einen  $K$ -Vektorraum.

**126)** Beweisen Sie: a) Für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt  $X^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, 0, 0, \dots)$

b)  $\{X^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  ist Basis von  $K[X]$  (aufgefaßt als  $K$ -Vektorraum).

**127)** Es sei  $K$  ein Körper. Beweisen Sie: Für alle  $p, q \in K[X]$  gelten

- $\text{grad}(p + q) \leq \max\{\text{grad } p, \text{grad } q\}$
- $\text{grad}(p \cdot q) = \text{grad } p + \text{grad } q$

Beachten Sie, daß dabei die folgenden Konventionen gelten: Für alle  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  ist

$$-\infty < n \quad \text{und} \quad -\infty + n = n + (-\infty) = -\infty + (-\infty) = -\infty$$

**128)** Führen Sie Division mit Rest für die folgenden Polynome  $f, g \in \mathbb{R}[X]$  durch, d.h. finden Sie die Polynome  $q, r \in \mathbb{R}[X]$ , die  $f = qg + r$  und  $\text{grad } r < \text{grad } g$  erfüllen:

- $f(X) = X^6 + X^5 - X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 2X - 4$ ,  
 $g(X) = X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2$
- $f(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 6X^2 + 2X - 4$ ,  $g(X) = X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6$
- $f(X) = X^8 - 1$ ,  $g(X) = X^2 - 1$

**129)** (Euklidischer Algorithmus für Polynome) Für zwei Polynome  $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$  führe man wiederholt Division mit Rest durch, d.h.

$$f = q_0g + r_1, \quad g = q_1r_1 + r_2, \quad r_1 = q_2r_2 + r_3, \quad \dots$$

mit jeweils eindeutig bestimmten  $q_0, q_1, q_2, \dots \in K[X]$  und  $r_1, r_2, r_3 \in K[X]$ , die

$$\text{grad } g > \text{grad } r_1 > \text{grad } r_2 > \text{grad } r_3 > \dots$$

erfüllen. Zeigen Sie:

- a) Das Verfahren bricht ab, d.h. für ein gewisses  $n$  gilt  $r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n$  (mit  $r_n \neq 0$ ) und  $r_{n-1} = q_n r_n$ . (Falls  $g \mid f$ , so setze  $n = 0$  und  $r_0 = g$ .)
- b) Das so berechnete  $r_n$  ist ein größter gemeinsamer Teiler von  $f$  und  $g$  im folgenden Sinn:  $r_n \mid f$  und  $r_n \mid g$  (d.h.  $r_n$  ist gemeinsamer Teiler von  $f$  und  $g$ ) und aus  $t \mid f$  und  $t \mid g$  (für ein  $t \in K[X]$ ) folgt  $t \mid r_n$ .

**130)** Beweisen Sie: Erfüllen die Koeffizienten des Polynoms  $p(X) = X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}[X]$  die Relation  $\beta^2 - 4\gamma < 0$ , so ist  $p$  über  $\mathbb{R}$  irreduzibel.

**131)** Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\varphi : V \rightarrow V$  linear. Beweisen Sie: Ist jedes  $v \in V \setminus \{0\}$  Eigenvektor von  $\varphi$ , so gibt es ein  $\lambda \in K$ , derart daß  $\varphi = \lambda \cdot \text{id}_V$ .

**132)** Beweisen Sie, daß die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist. (Wobei zwei Matrizen  $A, B \in M_n(K)$  ähnlich genannt werden, wenn es eine invertierbare Matrix  $S \in \text{GL}_n(K)$  gibt, sodaß  $B = SAS^{-1}$ .)

**133)** Es seien  $A, B \in M_n(K)$ . Beweisen Sie: Sind  $A$  und  $B$  ähnlich, so haben sie dasselbe charakteristische Polynom.

**134)** Berechnen Sie für die folgenden Matrizen aus  $M_3(\mathbb{R})$  das charakteristische Polynom, ihre Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**135)** Es sei  $A \in M_n(K)$  invertierbar mit charakteristischem Polynom  $p$ . Beweisen Sie: Für das charakteristische Polynom  $q$  von  $A^{-1}$  gilt  $q(X) = (-X)^n (\det A)^{-1} p(X^{-1})$ .

**136)** Es sei  $A \in M_n(K)$  mit charakteristischem Polynom

$$p(X) = \det(A - XI_n) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Beweisen Sie, daß

$$\text{a) } a_n = (-1)^n \quad \text{b) } a_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{ Spur } A \quad \text{c) } a_0 = \det A$$

**137)** Beweisen Sie, daß jedes Polynom  $(-1)^n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in K[X]$  das charakteristische Polynom einer Matrix aus  $M_n(K)$  ist. Hinweis: Benützen Sie Beispiel 91a) als Ausgangspunkt.

**138)** Beweisen Sie: Eine Matrix  $A \in M_n(K)$  ist genau dann invertierbar, wenn  $0 \in K$  nicht Eigenwert von  $A$  ist.

**139)** Es sei  $A \in M_n(K)$  invertierbar. Beweisen Sie:

- a) Wenn  $\lambda \in K$  Eigenwert von  $A$  ist, ist  $\lambda^{-1}$  Eigenwert von  $A^{-1}$ .  
 b)  $A$  und  $A^{-1}$  besitzen dieselben Eigenvektoren.

**140)** Beweisen Sie, daß die Matrizen  $A, B \in M_3(\mathbb{R})$  diagonalisierbar sind. Finden Sie dazu ähnliche Diagonalmatrizen sowie  $S, T \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ , derart daß  $S^{-1}AS$  bzw.  $T^{-1}BT$  mit diesen Diagonalmatrizen übereinstimmen.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 24 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

**141)** Man berechne  $A^n$  (mit  $n \in \mathbb{N}$  beliebig) für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

**142)** Beweisen Sie, daß durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 10x_2y_2 \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

auf  $\mathbb{R}^2$  ein inneres Produkt definiert ist.

**143)** Es sei  $V = M_{mn}(\mathbb{R})$  über  $\mathbb{R}$  und für  $A, B \in V$  sei  $\langle A, B \rangle = \text{Spur}(A^t \cdot B)$  definiert. Beweisen Sie, daß  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein inneres Produkt auf  $V$  ist.

**144)** Es seien  $a < b$  zwei reelle Zahlen und  $V = C([a, b])$  die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$ . Beweisen Sie, daß durch

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad \text{für alle } f, g \in C([a, b])$$

ein inneres Produkt auf  $V$  gegeben ist. Achten Sie auf eine genaue Argumentation beim Beweis, daß  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  positiv definit ist.

**145)** Beweisen Sie, daß durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n} = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

auf  $\mathbb{C}^n$  ein inneres Produkt definiert ist.

**146)** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ . Beweisen Sie, daß durch  $(v, w) := \langle [v]_B, [w]_B \rangle$  ein inneres Produkt auf  $V$  definiert ist. Dabei bedeutet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$ , das im vorangegangenen Beispiel behandelt wurde.

**147)** Es sei  $V = M_{mn}(\mathbb{C})$ . Beweisen Sie, daß durch  $\langle A, B \rangle = \text{Spur}(A^t \cdot \overline{B})$  ein inneres Produkt auf  $V$  definiert ist.

**148)** Es sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Beweisen Sie: Es seien  $v, w \in V$ . Dann gilt  $\langle v, x \rangle = \langle w, x \rangle \quad \forall x \in V \iff v = w$ .

**149)** Es sei  $V$  ein unitärer Vektorraum, auf dem die zwei inneren Produkte  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  definiert sind. Zeigen Sie: Wenn  $\langle x, x \rangle_1 = \langle x, x \rangle_2 \quad \forall x \in V$  dann gilt  $\langle v, w \rangle_1 = \langle v, w \rangle_2 \quad \forall v, w \in V$ . Hinweis: Setzen Sie zuerst  $x = v + w$  und dann  $x = iv + w$ . Gilt die analoge Aussage für euklidische Vektorräume?

**150)** Es sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\|\cdot\|$  die davon induzierte Norm. Dann gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall v, w \in V.$$

**151)** Es sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\|\cdot\|$  die davon induzierte Norm. Beweisen Sie, daß

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left( \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 \right) \quad \forall v, w \in V.$$

**152)** Es sei  $V$  ein unitärer Vektorraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\|\cdot\|$  die davon induzierte Norm. Beweisen Sie, daß

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left( \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v + iw\|^2 - i\|v - iw\|^2 \right) \quad \forall v, w \in V.$$

**153)** Es sei  $V = \mathbb{R}^n$  (über  $\mathbb{R}$ ) mit  $n \geq 2$ . Beweisen Sie, daß durch

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine Norm  $\|\cdot\|_\infty$  auf  $V$  gegeben ist, die nicht von einem inneren Produkt induziert wird.

**154)** Es sei  $V$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Beweisen Sie, daß

$$\sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2 = \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in V.$$

**155)** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum,  $\varphi : V \rightarrow V$  linear und  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Beweisen Sie, daß die Eintragungen in der Matrixdarstellung  $[\varphi]_{B,B} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  durch  $a_{ij} = \langle \varphi(v_j), v_i \rangle$  (für  $1 \leq i, j \leq n$ ) gegeben sind.

**156)** Es sei  $V = \mathbb{R}^4$  mit dem Standardskalarprodukt. Der Teilraum  $W$  sei durch

$$W = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

gegeben. Verwenden Sie das Gram – Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von  $W$  zu finden.

**157)** Es sei  $V = \mathbb{C}^4$  mit dem Standardskalarprodukt. Der Teilraum  $W$  sei durch

$$W = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \right]$$

gegeben. Verwenden Sie das Gram – Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von  $W$  zu finden.

**158)** Es sei  $V = C([0, 1])$  versehen mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx \quad \text{für } f, g \in C([0, 1]).$$

Der Teilraum  $W$  sei durch  $W = [p_0, p_1, p_2]$  gegeben (mit  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$  und  $p_2(x) = x^2$ ). Verwenden Sie das Gram – Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von  $W$  zu finden.

**159)** Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und  $W_1$  und  $W_2$  Teilräume von  $V$ . Beweisen Sie:

$$\text{a) } (W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \qquad \text{b) } (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

**160)** Es sei  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  und  $W$  bezeichne den von den Zeilenvektoren

$$(a_{11}, \dots, a_{1n})^t, \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn})^t$$

aufgespannten Teilraum des  $\mathbb{R}^n$ . Beweisen Sie, daß der Raum aller Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems  $A \cdot x = \mathbf{o}$  (mit  $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^m$ ) mit  $W^\perp$  übereinstimmt.

**161)** Es sei  $V = P_2(\mathbb{R})$ , versehen mit dem inneren Produkt  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$  für alle  $p, q \in P_2(\mathbb{R})$ . Weiters sei  $W = [r]$  mit  $r(x) = x + 2$ . Bestimmen Sie  $W^\perp$ .

**162)** Es sei  $V = M_n(\mathbb{R})$  versehen mit dem inneren Produkt  $\langle A, B \rangle = \text{Spur}(A^t \cdot B)$  für alle  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Weiters sei  $W$  der Teilraum aller Diagonalmatrizen. Bestimmen Sie  $W^\perp$ .

**163)** Sind die folgenden Matrizen orthogonal?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

**164)** Sind die folgenden Matrizen unitär?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\sqrt{2} - i\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{2}{9}\sqrt{2} - i\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9}\sqrt{2} + i\frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{9}\sqrt{2} - i\frac{2}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

**165)** Es sei  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in O(n)$ . Beweisen Sie, daß dann  $|\text{Spur } A| \leq n$  gilt. Hinweis: Leiten Sie zunächst  $a_{11}^2 + \dots + a_{nn}^2 \leq n$  aus  $A \cdot A^t = I_n$  ab. Wenden Sie dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Standardskalarprodukt auf  $(a_{11}, \dots, a_{nn})^t$  und  $(1, \dots, 1)^t$  an.