Proseminar Lineare Algebra 1, SS 2005

Christoph Baxa

1) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie mit Hilfe des Assoziativgesetzes, daß

$$a \circ ((b \circ c) \circ d) = (a \circ b) \circ (c \circ d) \text{ für alle } a, b, c, d \in G.$$

2) Es sei $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie mit Hilfe des Kommutativgesetzes, daß $a \circ b \circ c \circ d = d \circ b \circ c \circ a$ für alle $a, b, c, d \in G$.

3) Es sei $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $G = q\mathbb{Z} = \{qn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (die Menge aller durch q teilbaren ganzen Zahlen) und $+$ bezeichne die übliche Addition auf $\mathbb{Z}$. Überprüfen Sie, daß $(G, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

4) Es sei

$$G = \left\{ \frac{a}{2^n} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Beweisen Sie, daß $(G, +)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Sehen Sie Möglichkeiten, dieses Beispiel zu verallgemeinern, d.h. nach dem selben Muster andere abelsche Gruppen zu finden?

5) Beweisen Sie, daß die symmetrische Gruppe S_3 nicht abelsch ist. Hinweis: Finden Sie zwei bijektive Abbildungen $f, g : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, die nicht kommutieren (bei denen es auf die Reihenfolge der Ausführung ankommt), d.h. für die $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

6) Benützen Sie das vorangegangene Beispiel, um zu beweisen, daß die Gruppe S_n für $n \geq 3$ nicht abelsch ist. Hinweis: Modifizieren Sie Ihre Lösung des letzten Beispiels. Sind die beiden Gruppen S_1 und S_2 abelsch?

7) Beweisen Sie: In einer Gruppe $(G, \circ)$ sind die beiden Gleichungen $a \circ x = b$ und $x \circ a = b$ für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar. Hinweis: Beachten Sie, daß es nicht nur darum geht, Lösungen für beide Gleichungen zu finden, Sie sollen auch überprüfen, daß es keine weiteren, davon verschiedenen Lösungen geben kann.

8) Beweisen Sie: Wenn $(G, \circ)$ eine Gruppe ist, dann folgt aus $a \circ b = a \circ c$ die Gültigkeit der Gleichung $b = c$ (für alle $a, b, c \in G$).

Wenn $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e ist und $a \in G$, dann setzt man

$$a^0 = e,\ a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}} \text{ für } n \in \mathbb{N} \text{ sowie } a^{-n} = (a^{-1})^n \text{ ebenfalls für } n \in \mathbb{N}.$$

9) Beweisen Sie, ausgehend von der vorangegangenen Definition: Wenn $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist, dann gilt $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ für alle $a \in G$ und alle $m, n \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Beachten Sie, daß m und n als ganz vorausgesetzt sind. Zeigen Sie zunächst den Fall $m, n \in \mathbb{N}$. Wie würde man diese Relation in einer Gruppe $(G, +)$ schreiben?

10) Beweisen Sie: Wenn $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist, dann gilt $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ für alle $a, b \in G$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

11) Es sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Beweisen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der Addition und Multiplikation reeller Zahlen einen Körper bildet.

12) Beweisen Sie, daß $\mathbb{F}_2$ mit der in der Vorlesung angegebenen Addition und Multiplikation einen Körper bildet. (D.h. $0+0 = 1+1 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$.)

13) Es sei $\mathbb{Q}(i) = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ (wobei $i^2 = -1$). Beweisen Sie, daß $\mathbb{Q}(i)$ mit der Addition und Multiplikation komplexer Zahlen einen Körper bildet.

14) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Beweisen Sie $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in K$.

15) Zeigen Sie: Wenn K ein Körper ist und $n \in \mathbb{N}$, dann ist K^n ein Vektorraum über K.

16) Beweisen Sie: Die Menge $\mathcal{F} = \{(a_n)_{n \geq 1} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$ aller reeller Folgen ist ein reeller Vektorraum.

17) Es sei I ein Intervall reeller Zahlen und $\mathbb{R}^I = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller auf I definierter Funktionen (nach $\mathbb{R}$). Beweisen Sie, daß $\mathbb{R}^I$ ein reeller Vektorraum ist, wobei Summe $f + g$ und skalares Vielfache $\alpha \cdot f$ (mit $f, g \in \mathbb{R}^I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$) durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ bzw. $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $x \in I$ definiert sind.

18) Beweisen Sie, daß $P(\mathbb{R})$ (die Menge aller reeller Polynomfunktionen) und $P_n(\mathbb{R})$ (die Menge aller Polynomfunktionen $p \in P(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{grad} p \leq n$) reelle Vektorräume sind (mit den selben Verknüpfungen wie im letzten Beispiel). Hinweis: Beim zweiten Teil können Sie verwenden, daß $\operatorname{grad}(p + q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$ gilt. (Warum ist das so?)

19) Es sei I ein Intervall und $V = \{f \mid f : I \to (0, +\infty)\}$ die Menge aller positiver Funktionen auf I. Für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $f \oplus g$ und $\alpha \odot f$ durch $(f \oplus g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ und $(\alpha \odot f)(x) = (f(x))^\alpha$ definiert. Beweisen Sie, daß V ein reeller Vektorraum ist. Hinweis: Sie können mit der allgemeinen Potenz x^α unbefangen rechnen, auch wenn in der Analysis noch nicht bewiesen worden ist, daß dafür die selben Rechenregeln gelten wie z.B. für x^2.

20) Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \alpha_0 f''(x) + \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Beweisen Sie, daß V ein reeller Vektorraum ist.

21) Beweisen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

22) Welches der folgenden Beispiele ist ein Vektorraum?

a) $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z}^n$ über $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{C}$

23) Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta_1 x + \beta_2 y = 0 \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ ist.

24) Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ist.

25) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geq 0 \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 x_2 = 0 \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{Q} \right\}$

(Dabei soll im Teil b) gelten, daß $n \geq 2$ ist.)

26) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $P(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$?

a) $\{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ b) $\{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(1) = 1\}$ c) $\{p \in P(\mathbb{R}) \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : p(\alpha) = 0\}$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade (oder symmetrisch) wenn sie $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Gerade Funktionen sind z.B. alle konstanten Funktionen, $f(x) = x^2, x^4, x^6, \dots$ oder $f(x) = \cos x$. Ihre Graphen sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Sie heißt ungerade (oder schiefsymmetrisch) wenn sie $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Ungerade Funktionen sind z.B. $f(x) = x, x^3, x^5, \dots$ oder $f(x) = \sin x$. Ihre Graphen sind invariant unter einer Spiegelung am Nullpunkt.

27) Beweisen Sie, daß sowohl die geraden als auch die ungeraden Funktionen einen Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bilden.

28) Ist $\mathbb{Q}^n$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$?

29) Es sei V ein K-Vektorraum und U, W zwei Teilräume. Beweisen Sie, daß $U \cup W$ genau dann ein Teilraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

30) Finden Sie den Schnitt der folgenden beiden Teilräume U und W des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x - y + z = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; 2x + y - z = 0 \right\}.$$

31) Zeigen Sie: Wenn $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann gilt

$$P_{n_1}(\mathbb{R}) \cap \dots \cap P_{n_k}(\mathbb{R}) = P_{\min\{n_1, \dots, n_k\}}(\mathbb{R}).$$

32) Es sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}$, U alle geraden Funktionen in V und $W = P_2(\mathbb{R})$. Finden Sie den Schnitt $U \cap W$ dieser beiden Teilräume.

33) Bestimmen Sie den Teilraum des Vektorraums $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$, der von den drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. (D.h. finden Sie $[v_1, v_2, v_3]$.)

34) Liegt im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ der Vektor u im von den Vektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannten Teilraum? (D.h. gilt $u \in [v_1, v_2, v_3]$?) Dabei seien:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

35) Welcher Teilräume von $P_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ werden a) von $\{p_1, p_2, p_3\}$ (mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1+x$, $p_3(x) = 1+x+x^2$) bzw. b) von $\{q_1, q_2, q_3\}$ (mit $q_1(x) = x^2-2$, $q_2(x) = x+3$, $q_3(x) = x^2+2x+5$) aufgespannt? Liegt p (mit $p(x) = -x^2+x+3$) in einem von beiden?

36) Es $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie $V = U \oplus Z = W \oplus Z$, wobei gelten soll, daß

$$U = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad Z = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

37) Beweisen Sie, daß $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (über $\mathbb{R}$) die direkte Summe der Teilräume der geraden und der ungeraden Funktionen ist. Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \tfrac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

38) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind linear abhängig?

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

39) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge. Beweisen Sie, daß dann auch $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ linear unabhängig ist.

40) Stimmt die Aussage des letzten Beispiels auch noch für einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$?

41) Es sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ und p_0 bzw. p_1 sollen die Funktionen $p_0(x) = 1$ bzw. $p_1(x) = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) bezeichnen. Zeigen Sie, daß $\sin, \cos, p_0$ und p_1 linear unabhängig sind.

42) Beweisen Sie, daß die Menge $\{\log p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften des Logarithmus und der eindeutigen Primfaktorzerlegung, auch wenn Sie sie noch in keiner Vorlesung gehört haben sollten.

43) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Welche der Teilmengen aus Bsp. 38 ist ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis von V?

44) Es sei $V = P_3(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Basen?
a) $\{p_1, p_2, p_3\}$ wobei $p_1(x) = x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$ und $p_3(x) = x^3 - x^2$.

b) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ wobei $p_1(x) = 2x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^3 - x$ und $p_4(x) = x^2 + 1$.

45) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ (und beweisen Sie, dass es wirklich eine Basis ist). Was ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$?

46) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie: Wenn U Teilraum von V ist, gibt es eine Teilraum W von V, sodaß $V = U \oplus W$. Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von U zu einer Basis von V.

47) Beweisen Sie, daß die Teilräume des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ gerade $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{o}\}$ und die Geraden durch den Nullpunkt sind. Hinweis: Beachten Sie Korollar 3.9.

48) Finden und beweisen Sie eine analoge Aussage für $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.

49) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ und U und W bezeichne die beiden Teilräume

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \quad \text{und} \quad W = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} U$, $\dim_{\mathbb{R}} W$, $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U + W)$.

50) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und U und W die folgenden beiden Teilmengen des K^n über K:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

und

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{n-1} x_n = 0 \right\}$$

a) Zeigen Sie, daß U und W beides Teilräume sind.
b) Bestimmen Sie $\dim_K U$, $\dim_K W$, $\dim_K(U \cap W)$ und $\dim_K(U + W)$.
c) Gilt $K^n = U \oplus W$?

51) Was ändert sich im letzten Beispiel, wenn man $K = \mathbb{F}_2$ wählt?

52) Es sei K ein Körper und U und W Teilräume des K^3 über K. Beweisen Sie: Wenn weder U noch W von einem einzelnen Vektor erzeugt werden, ist $U \cap W \neq \{\mathbf{o}\}$.

53) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie:
a) Wenn U und W zwei Teilräume von V sind, die

$$V = U + W \quad \text{und} \quad \dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$$

erfüllen, dann gilt $V = U \oplus W$.
b) Wenn U und W zwei Teilräume von V sind, die

$$U \cap W = \{\mathbf{o}\} \quad \text{und} \quad \dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$$

erfüllen, dann gilt $V = U \oplus W$.

54) Berechnen Sie alle Produkte der folgenden drei Matrizen A, B und C (mit reellen Eintragungen), die man bilden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

55) Überprüfen Sie durch direktes Nachrechnen, daß $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ gilt (wobei A und B reelle Eintragungen haben):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

56) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Wenn $n \geq 2$ ist, ist $M_n(K)$ nicht kommutativ. Hinweis: Modifizieren Sie das Beispiel aus der Vorlesung, in dem der Spezialfall $M_2(\mathbb{R})$ gezeigt wurde. Ersetzen Sie darin zuerst $\mathbb{R}$ durch ein beliebiges K und betrachten Sie dann $n > 2$.

57) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Wenn $n \geq 2$ ist, sind nicht alle Matrizen in $M_n(K)$ invertierbar.

58) Es sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. Zeigen Sie: Wenn $a_{ii} \neq 0$ für $1 \leq i \leq n$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$, ist A invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

59) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie: Wenn $A \in M_n(K)$ die Eigenschaft besitzt, daß ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $A^{r+1} = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet), dann ist $I_n - A$ invertierbar und es gilt $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^r$.

Es sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Als Spur von A bezeichnet man

$$\text{Spur } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in K$$

.

60) Es sei K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$. Beweisen Sie:

a) Es gilt $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.

b) Wenn B invertierbar ist, gilt $\text{Spur}(B^{-1}AB) = \text{Spur } A$.

Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) wenn $A^t = A$ (bzw. $A^t = -A$) gilt.

61) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beweisen Sie:

a) Wenn $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ schiefsymmetrisch ist gilt $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

b) Sowohl die symmetrischen als auch die schiefsymmetrischen Matrizen bilden einen Teilraum von $M_n(K)$.

c) Bestimmen Sie die Dimension der beiden Teilräume aus b).

d) Der Vektorraum $M_n(K)$ ist die innere direkte Summe der beiden Teilräume aus b).
Hinweis: Lassen Sie sich von Bsp. 37 inspirieren.

62) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

63) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Wenn φ linear ist, geben Sie eine Darstellung mittels Multiplikation mit einer Matrix an.)

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto -v$ $\qquad$ b) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

64) Beweisen Sie, daß die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $\varphi : \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_k$, $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \left(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right)_{n\geq 1}$,
b) $\varphi : \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_n$, $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \left(\frac{1}{n}a_n\right)_{n\geq 1}$,
c) $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$, $A \mapsto A \cdot B - B \cdot A$
(dabei sei K ein Körper und $B \in M_n(K)$ ist fest gewählt).

65) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^4$. Überprüfen Sie, daß

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von V ist und geben Sie eine explizite Formel für die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ an, die durch die folgenden Bilder der Elemente von B gegeben ist:

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

66) a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Finden Sie das Bild einer Geraden unter φ.
b) Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises $x_1^2 + x_2^2 = 1$ unter der linearen Abbildung $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$.

67) Beweisen Sie, daß $\varphi : M_{m,n}(K) \to M_{n,m}(K)$, $A \mapsto A^t$ ein Isomorphismus ist.

68) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von φ und $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Kern} \varphi$.

69) Ist der Endomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, der durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, injektiv bzw. surjektiv?

70) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ habe die Eigenschaft $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Bild} \varphi$. Beweisen Sie, daß $\dim_K V$ gerade ist und geben Sie ein Beispiel einer solchen Abbildung an.

71) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ habe die Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = 0$ (d.h. $\varphi(\varphi(v)) = \mathbf{o}$ für alle $v \in V$) und es gelte $\dim_K V = 2 \cdot \operatorname{Rang} \varphi$. Beweisen Sie, daß dann $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Bild} \varphi$ gelten muß.

72) Es sei V ein K-Vektorraum und der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ habe die Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Beweisen Sie, daß $V = (\operatorname{Kern} \varphi) \oplus (\operatorname{Bild} \varphi)$. Hinweis: Verwenden Sie, daß $v = \varphi(v) + (v - \varphi(v))$ für jedes $v \in V$ gilt.

73) Finden Sie für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, die Matrixdarstellung $[\varphi]_{B,C}$, wenn

a) B und C die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bezeichnen.

b) B und C die folgenden beiden Basen bezeichnen:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Benützen Sie beide Darstellungen, um $\varphi\big((1,2,3)^t\big)$ zu berechnen.

74) Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, daß es Basen B von V und C von W gibt, sodaß

$$[\varphi]_{B,C} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Damit ist gemeint, daß sich in der linken oberen Ecke von $[\varphi]_{B,C}$ eine $r \times r$-Einheitsmatrix (mit $r = \operatorname{Rang} \varphi$) befindet und die restliche Matrix mit Nullen aufgefüllt ist. Die drei $\mathbf{0}$ bezeichnen also die (verschiedenen) Nullmatrizen in $M_{r,n-r}(K)$, $M_{m-r,r}(K)$ bzw. $M_{m-r,n-r}(K)$ wobei $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$. Für den Beweis kann man ähnlich wie im Beweis von Satz 5.13 vorgehen.

75) Die beiden linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie explizite Formeln für die Abbildungen $\varphi + 2\psi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ und $\varphi^2 (= \varphi \circ \varphi)$ sowie ihre Matrizendarstellungen bezüglich der Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$