2.9 Das mehrdimensionale Riemann-Integral

Definition: 1) Es seien $a_1 \le b_1, \dots, a_k \le b_k$ reelle Zahlen. Eine Menge $Q\ (\subseteq \mathbb{R}^k)$ der Gestalt

$$Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ für } 1 \le i \le k\}$$

wird Quader (oder k-dimensionales Intervall) genannt.

2) Dem Quader $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ ordnet man den Inhalt $v(Q) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k)$ zu.

3) Eine Zerlegung Z eines Intervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine endliche Menge $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subseteq [a,b]$ mit der Eigenschaft $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Die Punkte $t_0, t_1, \dots, t_n$ werden Teilungspunkte der Zerlegung Z genannt, die Intervalle $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ werden Teilungsintervalle der Zerlegung Z genannt.

4) Eine Zerlegung Z eines Quaders $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ ist gegeben durch Zerlegungen $Z_1, \dots, Z_k$ der Intervalle $[a_1, b_1], \dots, [a_k, b_k]$, d.h.

$$Z_1 = \{t_0^1, t_1^1, \dots, t_{n_1}^1\} \quad \text{mit } a_1 = t_0^1 < t_1^1 < \dots < t_{n_1}^1 = b_1,$$

$$Z_2 = \{t_0^2, t_1^2, \dots, t_{n_2}^2\} \quad \text{mit } a_2 = t_0^2 < t_1^2 < \dots < t_{n_2}^2 = b_2,$$

$$\dots\dots$$

$$Z_k = \{t_0^k, t_1^k, \dots, t_{n_k}^k\} \quad \text{mit } a_k = t_0^k < t_1^k < \dots < t_{n_k}^k = b_k$$

und besteht aus den $n = n_1 \cdots n_k$ Quadern $Q_{i_1, \dots, i_k} = [t_{i_1 - 1}^1, t_{i_1}^1] \times \dots \times [t_{i_k - 1}^k, t_{i_k}^k]$ (mit $1 \le i_j \le n_j$ für $1 \le j \le k$).

Bemerkungen: 1) Damit die Notation nicht unnötig kompliziert ist, werden wir meistens schreiben, dass die Zerlegung Z des Quaders Q aus den Quadern $Q_1, \dots, Q_n$ besteht. D.h. wir schreiben, wenn es möglich ist Q_i (mit $1 \le i \le n$) statt $Q_{i_1, \dots, i_k}$ (mit $1 \le i_j \le n_j$, $1 \le j \le k$).

2) Wird der Quader Q durch die Zerlegung Z in die Quader $Q_1, \dots, Q_n$ zerlegt, so gelten offensichtlich $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ und $v(Q) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)$.

Definition: 1) Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$, so heißt Z' feiner als Z, wenn $Z \subseteq Z'$.

2) Es sei $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und Z, Z' zwei Zerlegungen von Q. Ist Z gegeben durch Zerlegungen Z_1 von $[a_1, b_1], \dots, Z_k$ von $[a_k, b_k]$ und Z' gegeben durch Zerlegungen Z_1' von $[a_1, b_1], \dots, Z_k'$ von $[a_k, b_k]$, so heißt Z' feiner als Z, wenn Z_i' feiner ist als Z_i (als Zerlegungen von $[a_i, b_i]$) für $1 \le i \le k$.

Bemerkungen: 1) Ist Z eine Zerlegung des Quaders Q, die aus Quadern $Q_1, \dots, Q_n$ besteht und Z' eine Zerlegung des Quaders Q, die feiner als Z ist, so zerfällt jeder Quader Q_i beim Übergang zu Z' in Teilquader $Q'_{i,1}, \dots, Q'_{i,n_i}$ der Zerlegung Z' mit den Eigenschaften
$Q_i = Q'_{i,1} \cup \dots \cup Q'_{i,n_i}$ und $v(Q_i) = v(Q'_{i,1}) + \dots + v(Q'_{i,n_i})$.

2) Sind Z' und Z'' zwei Zerlegungen des Quaders $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$, so existiert stets eine gemeinsame Verfeinerung, d.h. eine Zerlegung Z des Quaders Q, die feiner als Z' und feiner als Z'' ist. (Sind Z' bzw. Z'' durch Zerlegungen Z'_i bzw. Z''_i von $[a_i, b_i]$ gegeben, so sei $Z_i := Z'_i \cup Z''_i$ Zerlegung von $[a_i, b_i]$ und Z durch $Z_1, \dots, Z_k$ gegeben.)

Definition: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z eine Zerlegung von Q in Teilquader $Q_1, \dots, Q_n$, so definiert man die Untersumme $U(f, Z)$ bzw. die Obersumme $O(f, Z)$ durch $U(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \right) v(Q_i)$ bzw. $O(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \right) v(Q_i)$.

15.1.2025

Lemma 128 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, Z und Z' zwei Zerlegungen von Q und Z' feiner als Z. Dann gilt $U(f, Z) \leq U(f, Z') \leq O(f, Z') \leq O(f, Z)$.

Beweis: 1. Ungleichung: Die Zerlegung Z bestehe aus den Quadern $Q_1, \dots, Q_n$. Der Quader Q_i zerfalle beim Übergang zu Z' in die Quader $Q_{i,1}, \dots, Q_{i,n_i}$ (für $1 \leq i \leq n$).
Aus $\inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \leq \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$ für $1 \leq j \leq n_i$ folgt

$$v(Q_i) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j}) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \leq \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j}) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$$

und daher

$$U(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j}) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x}) = U(f, Z').$$

2. Ungleichung

$$U(f, Z') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{ij}) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_{ij}} f(\underline{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{ij}) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_{ij}} f(\underline{x}) = O(f, Z')$$

3. Ungleichung: Analog wie 1. Ungleichung

Korollar 129 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von Q.

(i) Ist Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so ist
$U(f, Z_1) \leq U(f, Z) \leq O(f, Z) \leq O(f, Z_2)$,

(ii) $U(f, Z_1) \leq O(f, Z_2)$.

Beweis: (i) Folgt aus Lemma 128.

(ii) Folgt aus (i).

Definition: Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.

1) Die Zahl $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} := \sup\{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } Q\} = \sup_Z U(f,Z)$ wird das untere Integral von f genannt. (Ist Z_0 irgendeine Zerlegung von Q, so ist (nach Korollar 129 (iii)) $U(f,Z) \leq O(f,Z_0)$ für jede Zerlegung Z von Q. Also ist die Menge $\{U(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Also existiert ihr Supremum.)

2) Die Zahl $\overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} := \inf\{O(f,Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } Q\} = \inf_Z O(f,Z)$ wird das obere Integral von f genannt. (Die Existenz des Infimums kann man analog zur Existenz des Supremums beim unteren Integral begründen.)

3) Die Funktion f heißt RIEMANN-integrierbar (oder kurz: integrierbar) auf Q, wenn es genau eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $U(f,Z_1) \leq I \leq O(f,Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q. Man nennt dann I das Integral der Funktion f auf Q und schreibt dafür

$$\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(x_1,\dots,x_k)\,d(x_1,\dots,x_k).$$

Lemma 130 Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, so ist $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$

Beweis: Angenommen, es wäre $\delta := \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} > 0$. Nach Definition des unteren und oberen Integrals würde es dann Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q geben, sodass

$$\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \frac{\delta}{2} < U(f,Z_1) \leq \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \quad \text{und} \quad \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(f,Z_2) < \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \frac{\delta}{2}.$$

Ist Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so folgt aus Korollar 129 (i)

$$O(f,Z) \leq O(f,Z_2) < \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \frac{\delta}{2} = \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \frac{\delta}{2} < U(f,Z_1) \leq U(f,Z)$$

was unmöglich ist.

Satz 131 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent sind:

(i) f ist Riemann-integrierbar und (ii) $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$

Gelten (i) und (ii), so ist $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Angenommen, es wäre $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} < \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$. Ist $I \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq I \leq \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$ erfüllt, so gilt für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q, dass $U(f,Z_1) \leq \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq I \leq \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(f,Z_2)$. Da es unendlich viele derartige I gibt, ist f nicht Riemann-integrierbar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $I := \underline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} = \overline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x}$. Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von Q, so gilt

$U(f,Z_1) \leq \underline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} = I = \overline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} \leq O(f,Z_2)$ und I ist die einzige reelle Zahl, die

$U(f,Z_1) \leq I \leq O(f,Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q erfüllt.

Satz 132 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Äquivalent sind:

(i) f ist Riemann-integrierbar,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q, sodass $O(f,Z_2) - U(f,Z_1) < \varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Zerlegung Z von Q, sodass $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach Satz 131 ist $\underline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} = \overline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x})d\underline{x}$. Es gibt daher

Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q, sodass

$$\int_Q f(\underline{x})d\underline{x} - \frac{\varepsilon}{2} < U(f,Z_1) \leq \int_Q f(\underline{x})d\underline{x} \quad \text{und} \quad \int_Q f(\underline{x})d\underline{x} \leq O(f,Z_2) < \int_Q f(\underline{x})d\underline{x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher $O(f,Z_2) - U(f,Z_1) < \int_Q f(\underline{x})d\underline{x} + \frac{\varepsilon}{2} - \int_Q f(\underline{x})d\underline{x} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so folgt wegen Korollar 129 (i)

$O(f,Z) - U(f,Z) \leq O(f,Z_2) - U(f,Z_1) < \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ist f nicht Riemann-integrierbar, so muss wegen Lemma 130 und Satz 131

$\underline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} < \overline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x}$ gelten. Wähle ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $\varepsilon < \overline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} - \underline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x}$.

Für jede Zerlegung Z von Q gilt dann $O(f,Z) - U(f,Z) \geq \overline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} - \underline{\int_Q} f(\underline{x})d\underline{x} > \varepsilon$,

d.h. (iii) kann für solche $\varepsilon > 0$ nicht erfüllt werden

Satz 133 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar

20.1.2025

Beweis: Der Quader Q ist kompakt (siehe Seite 68) und f daher beschränkt nach Korollar 106. Nach Satz 107 ist f sogar gleichmäßig stetig. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \frac{\varepsilon}{v(Q)}$ $\forall \underline{x}, \underline{y} \in Q$. (Ist $v(Q) = 0$, so ist $U(f,Z) = O(f,Z) = 0$ für jede Zerlegung Z von Q und daher $\int_Q f(\underline{x})d\underline{x} = 0$.)

Wähle nun eine Zerlegung Z von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$, sodass jeder Quader Q_i in einer offenen Kugel $B_{\delta/2}(\underline{x}_i)$ (für ein gewisses $\underline{x}_i \in Q_i$) enthalten ist. Sind $\underline{x}, \underline{y} \in Q_i$, so folgt $\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq \|\underline{x} - \underline{x}_i\| + \|\underline{y} - \underline{x}_i\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$ und daher $|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \frac{\varepsilon}{v(Q)}$

Da f stetig ist, nimmt es nach Korollar 106 auf Q_i Minimum und Maximum an, d.h. für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ existieren $\underline{x}_i^+, \underline{x}_i^- \in Q_i$, sodass $f(\underline{x}_i^-) = \min_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x})$ und $f(\underline{x}_i^+) = \max_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x})$.

Daher ist

$$O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(f(\underline{x}_i^+) - f(\underline{x}_i^-)\right)}_{< \varepsilon / v(Q)} \cdot v(Q_i) < \frac{\varepsilon}{v(Q)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(Q_i)}_{= v(Q)} = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 132.

<u>Bemerkung</u>: Aus Satz 133 folgt mit einem Schlag die Riemann-Integrierbarkeit einer großen Zahl von Funktionen. Insbesondere gelten:

1) Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $p: Q \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, so ist p Riemann-integrierbar.

2) Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $p, q: Q \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktion (wobei $q \neq 0$ sein soll), so ist die rationale Funktion $\frac{p}{q}: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wenn Q keine Nullstelle von q enthielt.

3) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $Q \subseteq U$ ein Quader, so ist die Einschränkung $f: Q \to \mathbb{R}$ nach Satz 113 stetig und daher Riemann-integrierbar. Insbesondere ist (wegen Satz 114) $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ auf U existieren und stetig sind.

<u>Lemma 134</u> Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f: Q \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \alpha \ \forall \underline{x} \in Q$. Dann ist f Riemann-integrierbar und $\int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} = \alpha \cdot v(Q)$.

<u>Beweis</u>: Ist Z eine Zerlegung des Quaders Q in Quader $Q_1, \dots, Q_n$, so ist

$U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot v(Q_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) = \alpha \cdot v(Q)$ und daher $\underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \sup_Z U(f,Z) = \alpha \cdot v(Q)$.

Ebenso ist $O(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot v(Q_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) = \alpha \cdot v(Q)$ und daher $\overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \inf_Z O(f,Z) = \alpha \cdot v(Q)$.

<u>Satz 135</u> (Linearität des Riemann-Integrals) Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f, g: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $c \in \mathbb{R}$.

(i) Sind f und g beide Riemann-integrierbar, so ist auch $f+g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und

$$\int_Q (f+g)(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\, d\underline{x},$$

(ii) Ist f Riemann-integrierbar, so ist auch $c \cdot f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und

$$\int_Q (cf)(\underline{x})\, d\underline{x} = c \int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

<u>Beweis</u>: (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 132 gibt es Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q, sodass $O(f, Z_1) - U(f, Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g, Z_2) - U(g, Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Es sei Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, die aus Quadern $Q_1, \dots, Q_n$ besteht. Wegen Lemma 128 gelten dann auch $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g,Z) - U(g,Z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus

$f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{y}\in Q_i} f(\underline{y}) + \sup_{\underline{y}\in Q_i} g(\underline{y}) \quad \forall \underline{x}\in Q_i \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$ folgt

$\sup_{\underline{x}\in Q_i} (f+g)(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) + \sup_{\underline{x}\in Q_i} g(\underline{x}) \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$ und daher

$$O(f+g,Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot \sup_{\underline{x}\in Q_i}(f+g)(\underline{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot\Big(\sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) + \sup_{\underline{x}\in Q_i} g(\underline{x})\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot \sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot \sup_{\underline{x}\in Q_i} g(\underline{x}) = O(f,Z) + O(g,Z).$$

Analog zeigt man $U(f+g,Z) \geq U(f,Z) + U(g,Z)$. Daraus folgt

$$O(f+g,Z) - U(f+g,Z) \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und $f+g$ ist Riemann-integrierbar nach Satz 132. Aus

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(f,Z) + O(g,Z) \quad \text{und}$$

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq U(f+g,Z) \leq \int_Q (f+g)(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(f+g,Z) \leq O(f,Z) + O(g,Z) \quad \text{folgt}$$

$$\left|\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q (f+g)(\underline{x})\,d\underline{x}\right| \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt $\int_Q (f+g)(\underline{x})\,dx = \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x}$

(ii) Ist $c=0$, so ist $\int_Q \underbrace{(cf)(\underline{x})}_{=0}\,dx \overset{\text{Lemma 134}}{=} 0 = c\cdot\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}.$

Es sei nun $c>0$. Es sei $\varepsilon>0$. Nach Satz 132 gibt es eine Zerlegung Z von Q, sodass $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{c}$. Besteht Z aus den Quadern $Q_1,\dots,Q_n$, so ist

$$O(cf,Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot \sup_{\underline{x}\in Q_i}(cf)(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot\Big(c \sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x})\Big) = c\sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot \sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) = c\,O(f,Z).$$

Analog zeigt man $U(cf,Z) = c\,U(f,Z)$. Daraus folgt

$$O(cf,Z) - U(cf,Z) = c\,O(f,Z) - c\,U(f,Z) = c\,(O(f,Z) - U(f,Z)) < c\cdot\tfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

und cf ist Riemann-integrierbar nach Satz 132. Aus

$$c\,U(f,Z) \leq c\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq c\,O(f,Z) \quad \text{und}$$

$$c\,U(f,Z) = U(cf,Z) \leq \int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(cf,Z) = c\,O(f,Z) \quad \text{folgt}$$

$$\left|c\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x}\right| < c\,O(f,Z) - c\,U(f,Z) = c\,(O(f,Z) - U(f,Z)) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt $\int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x} = c\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Es sei nun $c=-1$. Es sei $\varepsilon>0$. Nach Satz 132 gibt es eine Zerlegung Z von Q, sodass $O(f,Z)-U(f,Z)<\varepsilon$. Besteht Z aus den Quadern $Q_1,\dots,Q_n$, so ist

$$O(-f,Z)=\sum_{i=1}^n v(Q_i)\cdot\sup_{\underline{x}\in Q_i}(-f)(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n v(Q_i)\left(-\inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x})\right) = -\sum_{i=1}^n v(Q_i)\cdot \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) = -U(f,Z)$$

Analog zeigt man $U(-f,Z)=-O(f,Z)$. Daraus folgt $O(-f,Z)-U(-f,Z)=-U(f,Z)+O(f,Z)<\varepsilon$ und $-f$ ist Riemann-integrierbar nach Satz 132. Aus

$$-O(f,Z)\le -\int_Q f(\underline{x})d\underline{x} \le -U(f,Z) \text{ und}$$

$$-O(f,Z)=U(-f,Z)\le \int_Q (-f)(\underline{x})d\underline{x}\le O(-f,Z)=-U(f,Z) \text{ folgt}$$

$$\left|-\int_Q f(\underline{x})d\underline{x}-\int_Q(-f)(\underline{x})d\underline{x}\right|\le -U(f,Z)+O(f,Z)<\varepsilon$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt $\int_Q(-f)(\underline{x})d\underline{x}=-\int_Q f(\underline{x})d\underline{x}$.

Ist schließlich $c<0$ beliebig, so folgt aus $cf=(-1)\cdot(|c|f)$ und den bisher bewiesenen Fällen, dass cf Riemann-integrierbar ist und

$$\int_Q (cf)(\underline{x})d\underline{x} = \int_Q(-|c|f)(\underline{x})d\underline{x} = -\int_Q(|c|f)(\underline{x})d\underline{x} = -|c|\int_Q f(\underline{x})d\underline{x} = c\int_Q f(\underline{x})d\underline{x}.$$

<u>Definition</u> (Erinnerung): Es sei $D\subseteq\mathbb{R}$. Eine Funktion $\phi: D\to\mathbb{R}$ heißt LIPSCHITZ-stetig, wenn $\exists L>0\ \forall x,y\in D: |\phi(x)-\phi(y)|\le L|x-y|$.

<u>Satz 136</u> Es sei $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ ein Quader und $f,g: Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

(i) Ist $D\subseteq\mathbb{R}$, $\phi: D\to\mathbb{R}$ Lipschitz stetig und $f(Q)\subseteq D$, so ist auch $\phi\circ f: Q\to\mathbb{R}$ Riemann integrierbar,

(ii) Die Funktion $|f|: Q\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\mapsto|f(\underline{x})|$ ist Riemann-integrierbar,

(iii) Wenn $\exists\delta>0\ \forall\underline{x}\in Q: |f(\underline{x})|\ge\delta$, so ist $\frac{1}{f}: Q\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\mapsto\frac{1}{f(\underline{x})}$ Riemann-integrierbar,

(iv) Die Funktion $f\cdot g: Q\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\mapsto f(\underline{x})\cdot g(\underline{x})$ ist Riemann-integrierbar,

(v) Die Funktionen $\max\{f,g\}: Q\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\mapsto\max\{f(\underline{x}),g(\underline{x})\}$ und $\min\{f,g\}: Q\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\mapsto\min\{f(\underline{x}),g(\underline{x})\}$ sind Riemann-integrierbar,

(vi) Die Funktionen $f^+:=\max\{f,0\}: Q\to\mathbb{R}$ und $f^-=\max\{-f,0\}: Q\to\mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar.

21.1.2025

<u>Beweis</u>: (i) Nach Voraussetzung $\exists L>0$, sodass $|\phi(x)-\phi(y)|\le L|x-y|\ \forall x,y\in D$

Es sei $\varepsilon>0$. Nach Satz 132 gibt es eine Zerlegung Z von Q, sodass $O(f,Z)-U(f,Z)<\frac{\varepsilon}{L}$. Besteht Z aus den Quadern $Q_1,\dots,Q_n$, so ist

$$|\phi(f(\underline{x}))-\phi(f(\underline{y}))| \le L\,|f(\underline{x})-f(\underline{y})| \le L\Big(\sup_{\underline{z}\in Q_i} f(\underline{z}) - \inf_{\underline{z}\in Q_i} f(\underline{z})\Big) \quad \forall \underline{x},\underline{y}\in Q_i \ \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

und daher

$$\sup_{\underline{x}\in Q_i}(\phi\circ f)(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i}(\phi\circ f)(\underline{x}) \le L\Big(\sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x})\Big) \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

und somit

$$O(\phi\circ f, Z) - U(\phi\circ f, Z) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{\underline{x}\in Q_i}(\phi\circ f)(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i}(\phi\circ f)(\underline{x})\Big)\cdot v(Q_i)$$

$$\le L\sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x})\Big)\cdot v(Q_i) = L\big(O(f,Z)-U(f,Z)\big) < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Nach Satz 132 ist $\phi\circ f$ Riemann-integrierbar.

(ii) Die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |x|$ ist Lipschitz-stetig (mit $L=1$), da $||x|-|y|| \le |x-y| \ \forall x,y\in\mathbb{R}$. Die Behauptung folgt aus (i).

(iii) Es sei $D=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|\ge\delta\}$. Die Funktion $D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{x}$ ist Lipschitz-stetig (mit $L=1/\delta^2$), da $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \le \frac{1}{\delta^2}|x-y| \ \forall x,y\in D$. Die Behauptung folgt aus (i).

(iv) Wir zeigen zunächst, dass aus der Riemann-Integrierbarkeit von $f: Q\to\mathbb{R}$ die Riemann-Integrierbarkeit von $f^2: Q\to\mathbb{R}$, $\underline{x}\mapsto (f(\underline{x}))^2$ folgt.
Ist $D\subseteq\mathbb{R}$ beschränkt (d.h. $\exists c>0 \ \forall x\in D: |x|\le c$), so ist die Funktion $D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ Lipschitz-stetig (mit $L=2c$), da $|x^2-y^2| = |x+y|\cdot|x-y| \le (|x|+|y|)\cdot|x-y| \le 2c\cdot|x-y| \ \forall x,y\in D$.
Da $f: Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, ist f beschränkt. D.h. dass die Menge $D:=f(Q)\ (\subseteq\mathbb{R})$ beschränkt ist und die Riemann-Integrierbarkeit von f^2 folgt aus (i).
Die Riemann-Integrierbarkeit von $f\cdot g: Q\to\mathbb{R}$ folgt aus dem eben gezeigten Spezialfall $f=g$, Satz 135 und der Gleichung $f\cdot g = \frac{1}{4}\big((f+g)^2-(f-g)^2\big)$.

(v) Folgt aus (ii), Satz 135 und den Gleichungen $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ und $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$.

(vi) Folgt aus Lemma 134, Satz 135 und (v).

<u>Satz 137</u> (Monotonie des Riemann-Integrals) Es sei $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ ein Quader und $f,g: Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.
(i) Ist $f\ge 0$, so ist $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \ge 0$,
(ii) Ist $f\ge g$, so ist $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \ge \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x}$.

<u>Beweis</u>: (i) Ist Z eine Zerlegung von Q in Quader $Q_1,\dots,Q_n$, so ist $\inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) \ge 0 \ \forall i\in\{1,\dots,n\}$ und daher $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \underline{\int_Q} f(\underline{x})\,d\underline{x} \ge U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\cdot\inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) \ge 0$.

(ii) Aus $f\ge g$ folgt $f-g\ge 0$ und daher $0 \overset{(i)}{\le} \int_Q (f-g)(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x}$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 138 (Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale) Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt $\left| \int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} \right| \leq \int_Q |f(\underline{x})|\, d\underline{x}$.

Beweis: Nach Satz 136 (ii) ist $|f|: Q \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann-integrierbar. Wendet man Satz 137 (ii) auf die Ungleichungskette $-|f| \leq f \leq |f|$ an, so erhält man

$-\int_Q |f(\underline{x})|\, d\underline{x} \leq \int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq \int_Q |f(\underline{x})|\, d\underline{x}$, woraus die Behauptung folgt.

Ende Prüfungsstoff 1. Prüfungstermin 3.2.2025