2.7 Die Ableitung einer Funktion in Mehrdimensionalen

Bemerkung: Im eindimensionalen wird die Ableitung $f'(a)$ einer Funktion f im Punkt a als $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ definiert. Das funktioniert für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^\ell$ und $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $k, \ell \geq 1$ beliebig nicht, da man den „Quotienten" eines Vektors aus $\mathbb{R}^\ell$ und eines Vektors aus $\mathbb{R}^k$ bilden müsste. Darum verwendet man für die Verallgemeinerung die folgende Charakterisierung:

Satz 111 Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$. Äquivalent sind:

(i) f ist bei a differenzierbar,

(ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}: \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a}\left(f(x) - f(a) - \alpha(x-a)\right) = 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\alpha := f'(a)$. Dann ist $\frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\to f'(a)} - f'(a) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Aus

$$0 = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-\alpha(x-a)}{x-a} = \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha\right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \alpha$$

folgt $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha$.

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^\ell$ und $\underline{a} \in U$. Dann ist f bei $\underline{a}$ differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ gibt, sodass $\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - L(\underline{x}-\underline{a})\right) = \underline{0}$.

Bemerkungen: 1) Satz 111 bzw. die Definition besagen, dass f bei $\underline{a}$ differenzierbar ist, wenn f sich in der Nähe von $\underline{a}$ sehr gut durch die „Tangentialabbildung" $\underline{x} \mapsto f(\underline{a}) + L(\underline{x}-\underline{a})$ approximieren lässt. Dabei heißt „sehr gut", dass der Fehler $f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - L(\underline{x}-\underline{a})$ rascher gegen $\underline{0}$ geht als der Abstand $\underline{x}-\underline{a}$, wenn man $\underline{x} \to \underline{a}$ gehen lässt.

2) Im eindimensionalen (dh für $k = \ell = 1$) ist die lineare Abbildung $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $L(x) = f'(a) \cdot x$.

3) Aus der Definition ist zunächst nicht ersichtlich, dass die lineare Abbildung L (wenn sie existiert) eindeutig bestimmt ist. Das folgt aber aus dem nachfolgenden

Satz 112 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^\ell$ und $\underline{a} \in U$. Wenn f bei $\underline{a}$ differenzierbar ist, dann existieren alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a})$ (mit $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq k$) und die nach der Definition existierende lineare Abbildung $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ besitzt die (nach Satz 59 (ii) existierende) Darstellung $L(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\underline{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\underline{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}(\underline{a}) & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_2}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(\underline{a}) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a})\right)_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ 1 \leq j \leq k}} \in \mathbb{R}^{\ell \times k}.$$

Beweis: Nach Satz 59(ii) gibt es eine Matrix $A = (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le \ell \\ 1\le j\le k}} \in \mathbb{R}^{\ell\times k}$, derart dass $L(\underline{x}) = A\cdot\underline{x}$. Wir wollen zeigen, dass $\alpha_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a})$. Da f bei $\underline{a}$ differenzierbar ist, gilt

$$\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f(\underline{x})-f(\underline{a})-A\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{a}]{} \underline{0}.$$

Geht man (mit Hilfe von Satz 98) zu den Komponenten über, so erhält man

$$\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f_i(\underline{x})-f_i(\underline{a})-\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(x_s-a_s)\right) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{a}]{} 0$$

für $1\le i\le \ell$. Das gilt insbesondere wenn $x_s = a_s$ für $1\le s\le k$, $s\ne j$. Dann ist $\sum_{s=1}^{k}\alpha_{is}(x_s-a_s) = \alpha_{ij}(x_j-a_j)$ und $\|\underline{x}-\underline{a}\| = \sqrt{\sum_{s=1}^{k}(x_s-a_s)^2} = |x_j-a_j|$ und daher

$$\frac{f_i(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_k)-f_i(a_1,\dots,a_k)-\alpha_{ij}(x_j-a_j)}{|x_j-a_j|} \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{a}]{} 0 \quad \text{für } 1\le i\le \ell,\ 1\le j\le k.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\left|\frac{f_i(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_k)-f_i(a_1,\dots,a_k)}{x_j-a_j}-\alpha_{ij}\right| \xrightarrow[x_j\to a_j]{} 0 \quad \text{für } 1\le i\le \ell,\ 1\le j\le k$$

und daher

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) = \lim_{x_j\to a_j}\frac{f_i(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_k)-f_i(a_1,\dots,a_k)}{x_j-a_j} = \alpha_{ij} \quad \text{für } 1\le i\le \ell,\ 1\le j\le k.$$

Definition: Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^k$ offen, $f: U\to\mathbb{R}^\ell$, $\underline{a}\in U$ und f bei $\underline{a}$ differenzierbar. Als Ableitung $f'(\underline{a})$ von f bei $\underline{a}$ bezeichnen wir die sogenannte JACOBISCHE Matrix

$$f'(\underline{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\underline{a}) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

die wir mit der linearen Abbildung $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^\ell$, $\underline{x}\mapsto f'(\underline{a})\cdot\underline{x}$ identifizieren.

Bemerkung: Statt $f'(\underline{a})$ wird auch die Notation $Df(\underline{a})$ verwendet.

Satz 113 Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^k$ offen, $f: U\to\mathbb{R}^\ell$ und $\underline{a}\in U$. Wenn f bei $\underline{a}$ differenzierbar ist, ist f bei $\underline{a}$ stetig.

Beweis: Für $\underline{x}\in U\setminus\{\underline{a}\}$ ist

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \underbrace{f'(\underline{a})\cdot\underbrace{(\underline{x}-\underline{a})}_{\to\underline{0}}}_{\to\underline{0}} + \underbrace{\|\underline{x}-\underline{a}\|}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f(\underline{x})-f(\underline{a})-f'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right)}_{\to\underline{0}} \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{a}]{} f(\underline{a})$$

und f ist daher stetig bei $\underline{a}$. (Bei $f'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a}) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{a}]{} \underline{0}$ wurde verwendet, dass lineare Abbildungen stetig sind, siehe Bsp. 6) auf Seite 78.)

7.1.2025

Bemerkung: Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a})$ an der Stelle $\underline{a}$ folgt nicht, dass f bei $\underline{a}$ differenzierbar ist (d.h. man kann Satz 112 nicht „umkehren"). Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen bei $\underline{a}$ folgt ja nicht einmal die Stetigkeit von f bei $\underline{a}$ (siehe Bsp. 2) auf Seite 84). Die Differenzierbarkeit von f bei $\underline{a}$ gilt aber, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ in einer Umgebung von $\underline{a}$ nicht nur existieren, sondern auch stetig sind:

Satz 114: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^l$ und $\underline{a} \in U$. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x})$ mögen für alle $\underline{x} \in U$ existieren und bei $\underline{a}$ stetig sein. Dann ist f bei $\underline{a}$ differenzierbar.

Beweis: Für $1 \le i \le l$ ist

$$f_i(x_1,\dots,x_k) - f_i(a_1,\dots,a_k) = \sum_{j=1}^{k} \Big(f_i(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_k) - f_i(a_1,\dots,a_{j-1},a_j,x_{j+1},\dots,x_k) \Big)$$

$$\begin{aligned} = f_i(x_1,x_2,\dots,x_k) &- f_i(a_1,x_2,\dots,x_k) \\ &+ f_i(a_1,x_2,\dots,x_k) - f_i(a_1,a_2,x_3,\dots,x_k) \\ &\quad + f_i(a_1,a_2,x_3,\dots,x_k) - f_i(a_1,a_2,a_3,x_4,\dots,x_k) \\ &\qquad + \cdots\cdots \\ &\qquad\quad + f_i(a_1,\dots,a_{k-1},x_k) - f_i(a_1,\dots,a_k) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (x_j - a_j) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},\xi_j,x_{j+1},\dots,x_k) \quad \text{für jeweils ein } \xi_j \text{ zwischen } a_j \text{ und } x_j$$

(Hier wurde der Mittelwertsatz der Differentialrechnung k-mal angewendet)

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \cdot (x_j - a_j) + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},\xi_j,x_{j+1},\dots,x_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \right)(x_j - a_j),$$

woraus

$$\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} \left(f_i(x_1,\dots,x_k) - f_i(a_1,\dots,a_k) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \cdot (x_j - a_j) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},\xi_j,x_{j+1},\dots,x_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \right) \cdot \frac{x_j - a_j}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}$$

und daher

$$\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|} \left| f_i(x_1,\dots,x_k) - f_i(a_1,\dots,a_k) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \cdot (x_j - a_j) \right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_{j-1},\xi_j,x_{j+1},\dots,x_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) \right|}_{\longrightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{|x_j - a_j|}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}}_{\le 1} \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{a}]{} 0$$

folgt (für $1 \le i \le l$). Dabei wurde verwendet: Wenn $\underline{x} \to \underline{a}$ geht, dann gehen auch $x_{j+1} \to a_{j+1}, \dots, x_k \to a_k$ und $\xi_j \to a_j$, da ξ_j zwischen a_j und x_j liegt. Die Differenzierbarkeit von f bei $\underline{a}$ folgt aus Satz 98.

Bemerkungen: 1) Als Kurzschreibweise für die Jacobische Matrix wird auch

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_l)}{\partial(x_1,\dots,x_k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

verwendet. (Dabei ist $f: U \to \mathbb{R}^l$ (mit $U \subseteq \mathbb{R}^k$) und $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}),\dots,f_l(\underline{x}))$.)

2) Aus Satz 114 folgt sofort: Ist $f \in C^1(U,\mathbb{R}^l)$, so ist f auf U differenzierbar.

3) Es ist möglich, dass eine Funktion f in einem Punkt $\underline{a}$ differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ bei $\underline{a}$ aber nicht stetig sind. (Das war ja schon im eindimensionalen, d.h. für $k=l=1$, so.)

Beispiel: Es sei $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (xy\sin z,\ x^2-y^2-\cos z)$. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = y\sin z, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = x\sin z, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = xy\cos z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = -2y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = \sin z$$

existieren auf ganz $\mathbb{R}^3$ und sind dort stetig, d.h. $f \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$. Daher ist f in jedem Punkt $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ differenzierbar und

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\sin z & x\sin z & xy\cos z \\ 2x & -2y & \sin z \end{pmatrix} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Satz 115 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f,g: U \to \mathbb{R}^l$, $\underline{a} \in U$ und f und g seien bei $\underline{a}$ differenzierbar.

(i) $f+g: U \to \mathbb{R}^l$ ist bei $\underline{a}$ differenzierbar und $(f+g)'(\underline{a}) = f'(\underline{a}) + g'(\underline{a})$,

(ii) $\alpha f: U \to \mathbb{R}^l$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) ist bei $\underline{a}$ differenzierbar und $(\alpha f)'(\underline{a}) = \alpha \cdot f'(\underline{a})$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$).

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - f'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) = \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(g(\underline{x}) - g(\underline{a}) - g'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) = \underline{0}$$

und daher

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left((f+g)(\underline{x}) - (f+g)(\underline{a}) - (f'(\underline{a})+g'(\underline{a}))\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right)$$

$$\overset{\text{Satz 99 (i)}}{=} \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - f'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) + \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(g(\underline{x}) - g(\underline{a}) - g'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) = \underline{0}+\underline{0} = \underline{0}$$

und

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left((\alpha f)(\underline{x}) - (\alpha f)(\underline{a}) - (\alpha f'(\underline{a}))\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) \overset{\text{Satz 99 (iv)}}{=} \alpha\cdot\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{1}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}\left(f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - f'(\underline{a})\cdot(\underline{x}-\underline{a})\right) = \alpha\cdot\underline{0} = \underline{0}$$

Satz 116 (Kettenregel) Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, $f: U \to V$, $g: V \to \mathbb{R}^m$, $\underline{a} \in U$ und f bei $\underline{a}$ und g bei $f(\underline{a})$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f: U \to \mathbb{R}^m$ bei $\underline{a}$ differenzierbar und $(g \circ f)'(\underline{a}) = g'(f(\underline{a})) \cdot f'(\underline{a})$.

Ohne Beweis

Bemerkung: Sind f und g wie in Satz 116, $h = g \circ f$ und f, g und h haben Komponenten

$f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_l(\underline{x}))$, $g(\underline{y}) = (g_1(\underline{y}), \ldots, g_m(\underline{y}))$ und $h(\underline{x}) = (h_1(\underline{x}), \ldots, h_m(\underline{x}))$,

so besagt Satz 116, dass

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_k}(\underline{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_k}(\underline{a}) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{m \times k}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(\underline{a})) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_l}(f(\underline{a})) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(f(\underline{a})) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_l}(f(\underline{a})) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{m \times l}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\underline{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(\underline{a}) & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(\underline{a}) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{l \times k}}$$

Für die Eintragungen von $h'(\underline{a})$ gilt also

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\underline{a}) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(\underline{a})) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\underline{a}) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(\underline{a})) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\underline{a}) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(\underline{a})) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\underline{a})$$

$$= \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial g_i}{\partial y_s}(f(\underline{a})) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(\underline{a})$$

Beispiel: Sind $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x^3, 1+x^2)$ und $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(y_1, y_2) = e^{y_1} \sin y_2$, so ist $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = g(f(x)) = g(x^3, 1+x^2) = e^{x^3} \sin(1+x^2)$ und daher $h'(x) = 3x^2 e^{x^3} \sin(1+x^2) + 2x e^{x^3} \cos(1+x^2)$. Das kann man auch mit Hilfe von Satz 116 berechnen, nämlich

$$h'(x) \underset{''}{=} \frac{\partial h}{\partial x}(x) \overset{''}{=} \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x)$$

$$= e^{y_1} \sin y_2 \Big|_{(y_1, y_2) = (x^3, 1+x^2)} \cdot 3x^2 + e^{y_1} \cos y_2 \Big|_{(y_1, y_2) = (x^3, 1+x^2)} \cdot 2x$$

$$= 3x^2 e^{x^3} \sin(1+x^2) + 2x e^{x^3} \cos(1+x^2)$$

8.1.2025