2.6 Partielle Ableitungen

<u>Definition</u>: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$. Existiert die Ableitung der Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, a_2, \dots, a_k)$ an der Stelle a_1 (im Sinn der eindimensionalen reellen Analysis), dh existiert der Grenzwert

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2, \dots, a_k) - f(a_1, a_2, \dots, a_k)}{x_1 - a_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \dots, a_k) - f(a_1, a_2, \dots, a_k)}{h},$$

so nennt man ihn die partielle Ableitung von f nach der Veränderlichen x_1 an der Stelle $\underline{a}$.

Wir schreiben dafür $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_k)$

Völlig analog definiert man $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a})$.

<u>Bemerkung</u>: Für partielle Ableitungen werden auch andere Notationen verwendet, z. B. $D_1 f(\underline{a})$ oder $f_{x_1}(\underline{a})$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a})$ (oder allgemeiner $D_i f(\underline{a})$ oder $f_{x_i}(\underline{a})$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$).

<u>Beispiel</u>: Wenn man eine Funktion partiell nach x_i ableitet, behandelt man die anderen Veränderlichen (dh $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k$) wie Konstante. Ist z.B.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(x \cdot y)$, so sind

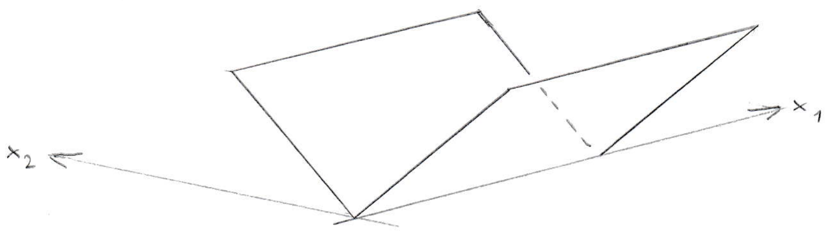
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \cos(xy) \cdot y = 2x + y^3 \cos(xy) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin(xy) + y^2 \cos(xy) \cdot x = 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy).$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Aus der Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a})$ folgt <u>nicht</u> die Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a})$ (bzw. allgemeiner folgt aus der Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ nicht die Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{a})$ für $j \neq i$). Ist z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = |x_2|$, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \;\; \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_2 > 0 \\ -1 & \text{falls } x_2 < 0 \end{cases}$$

aber $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0)$ existiert für kein $x_1 \in \mathbb{R}$, da die Betragsfunktion bei 0 nicht differenzierbar ist.



2) Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen in einem Punkt folgt nicht die Stetigkeit in diesem Punkt. Es sei z. B.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\[2ex] 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir haben bereits gezeigt, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist (siehe Bsp. 5) auf Seite 78). Es gilt aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad \text{und analog } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

3) Für partielle Ableitungen gelten offensichtlich alle Rechenregeln für Ableitungen, die aus der eindimensionalen reellen Analysis bekannt sind, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\right).$$

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\underline{a} \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$. Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ für $1 \le i \le k$, so kann man den (Zeilen)Vektor $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a})\right)$ bilden, der Gradient von f bei $\underline{a}$ genannt wird.

Bemerkung: Man schreibt für den Gradienten auch $\nabla f(\underline{a})$, wobei $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ Nabla-Operator genannt wird.

Beispiel: Es sei $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$. Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}} = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|} \quad \text{für } 1 \le i \le k \quad \text{und daher}$$

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{\|\underline{x}\|}\underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}.$$

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\underline{a} \in U$, $f: U \to \mathbb{R}$ und $\underline{u} \in \mathbb{R}^k$ sei ein Einheitsvektor (d.h. $\|\underline{u}\| = 1$). Existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{u}) - f(\underline{a})}{t},$$

so wird er Richtungsableitung von f an der Stelle $\underline{a}$ in Richtung $\underline{u}$ genannt. Man schreibt dafür $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{a})$ oder $D_{\underline{u}} f(\underline{a})$.

Beispiel: Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ und $\underline{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\left(x + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - xy\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(xy + \frac{(x+y)t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - xy\right)$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2}\right) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

Bemerkungen: 1) Partielle Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen, nämlich für $\underline{u} = \underline{e_i}$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{e_i}}(\underline{a})$

2) Aus der Existenz aller Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{a})$ (d.h. $\forall\, \underline{u}\in\mathbb{R}^k$ mit $\|\underline{u}\|=1$) in einem Punkt $\underline{a}\in\mathbb{R}^k$ folgt nicht die Stetigkeit der Funktion im Punkt $\underline{a}$. Es sei z.B.

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\\[2ex] 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Wir berechnen die Richtungsableitungen in Richtung $\underline{u}=(u_1,u_2)$ an der Stelle $\underline{a}=(0,0)$.

Ist $u_1\neq 0$ und $u_2\neq 0$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t\underline{u})-f(\underline{0})\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3u_1u_2^2}{t^2u_1^2+t^4u_2^4}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2u_1u_2^2}{t^2u_1^2+t^4u_2^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+t^2u_2^4}=\frac{u_1u_2^2}{u_1^2}=\frac{u_2^2}{u_1}=\frac{1-u_1^2}{u_1}=\frac{1}{u_1}-u_1$$

Ist $u_1=0$ (d.h. $\underline{u}=(0,\pm 1)$) oder $u_2=0$ (d.h. $\underline{u}=(\pm 1,0)$), so ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(t\underline{u})-f(\underline{0})\right)=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

Die Funktion f ist bei $(0,0)$ aber nicht stetig. Für $x=0$ oder $y=0$ ist $f(x,y)=0$. Auf der „Parabel mit Loch" $x=y^2\ (\neq 0)$ ist aber $f(x,y)=\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}$. Die Funktion f nimmt beliebig nahe beim Nullpunkt auch den Wert $\frac{1}{2}$ an. 16.12.2024

<u>Definition</u>: Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^k$ offen und $f:U\to\mathbb{R}$. Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ für ein i (mit $1\leq i\leq k$) für alle $\underline{x}\in U$, so erhält man eine Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_i}:U\to\mathbb{R}$. Existiert von dieser Funktion in einem $\underline{a}\in U$ wieder die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{a})$ für ein j (mit $1\leq j\leq k$), so nennt man sie partielle Ableitung 2. Ordnung und schreibt dafür

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\underline{a})=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{a}).$$ Ist $i=j$, so schreibt man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underline{a})$.

(Andere dafür verwendete Notationen sind $D_jD_if(\underline{a})=D_j(D_if)(\underline{a})$ bzw. $f_{x_ix_j}(\underline{a})=(f_{x_i})_{x_j}(\underline{a})$.)

Sind die partiellen Ableitungen 2. Ordnung überall definiert und besitzen selbst wieder partielle Ableitungen, so kann man partielle Ableitungen 3., 4. bzw. allgemein n-ter Ordnung bilden. Für $n\geq 2$ ist also

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}(\underline{a})=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right)(\underline{a})\qquad (\text{mit } 1\leq i_1,\dots,i_n\leq k).$$

(Andere dafür verwendete Notationen sind $D_{i_n}\cdots D_{i_1}f(\underline{a})=D_{i_n}(D_{i_{n-1}}\cdots D_{i_1}f)(\underline{a})$ bzw. $f_{x_{i_1}\cdots x_{i_n}}(\underline{a})=(f_{x_{i_1}\cdots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}}(\underline{a})$.)

Bemerkung: Manchmal findet man auch die Notation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Für „hinreichend schönes" f macht die Reihenfolge der partiellen Ableitungen tatsächlich keinen Unterschied, da $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, siehe nachfolgend Satz 109 und Korollar 110 (Satz von SCHWARZ).

Beispiele: 1) Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$ haben wir bereits

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^3 \cos(xy)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy)$ berechnet (siehe Seite 83).

Für die Funktion f existieren alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - y^4 \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3y^2 \cos(xy) - xy^3 \sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y^2 \cos(xy) + y^2 \cos(xy) - xy^3 \sin(xy) = 3y^2 \cos(xy) - xy^3 \sin(xy) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \sin(xy) + 2xy \cos(xy) + 2xy \cos(xy) - x^2 y^2 \sin(xy)$$
$$= (2 - x^2 y^2) \sin(xy) + 4xy \cos(xy)$$

Man sieht, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ gilt. Allerdings war $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ schneller und einfacher zu berechnen als $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2) Bei partiellen Ableitungen 2. Ordnung kann es durchaus auf die Reihenfolge der Ableitungen ankommen. Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Einerseits ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3 y - xy^3) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 y - x^2 y^3 + 3x^2 y^3 - y^5 - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4) y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

und daher

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right) = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{h} \left(-\frac{h^5}{h^4} - 0 \right)}_{= -1} = -1.$$

Andererseits ist $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

und daher

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4}-0\right)}_{=1} = 1.$$

Dh es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1$ aber $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$.

<u>Definition</u>: Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^k$ offen und $f: U\to\mathbb{R}$. Wenn auf U alle partiellen Ableitungen von f bis zur m-ten Ordnung existieren und alle stetig sind, dann sagt man, f sei eine C^m-Funktion und schreibt dafür $f\in C^m(U)$. (Dh $C^m(U)$ bezeichnet die Menge aller C^m-Funktionen $f: U\to\mathbb{R}$.)

<u>Definition</u>: Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^k$ offen, $f: U\to\mathbb{R}^l$ und $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}),\dots,f_l(\underline{x}))$ $\forall \underline{x}\in U$. Man sagt, f sei eine C^m-Funktion, wenn $f_1,\dots,f_l$ alle C^m-Funktionen sind, dh wenn $f_1,\dots,f_l\in C^m(U)$. Man schreibt dafür $f\in C^m(U,\mathbb{R}^l)$. (Dh $C^m(U,\mathbb{R}^l)$ bezeichnet die Menge aller C^m-Funktionen $f: U\to\mathbb{R}^l$.)

<u>Lemma 108</u> Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^2$ offen und $f\in C^2(U)$. Ist $[a,b]\times[c,d]\subseteq U$, so $\exists(\xi,\eta)\in(a,b)\times(c,d)$, sodass

$$\square f(a,b,c,d) = f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi,\eta)\cdot(b-a)\cdot(d-c).$$

<u>Beweis</u>: Es sei $F(x) := f(x,d)-f(x,c)$. Dann ist

$$F(b)-F(a) = (f(b,d)-f(b,c)) - (f(a,d)-f(a,c)) = \square f(a,b,c,d).$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ auf U existiert, existiert $F'(x)$ auf $[a,b]$ und $F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,d)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,c)$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $\xi\in(a,b)$, sodass

$$\square f(a,b,c,d) = F(b)-F(a) = F'(\xi)\cdot(b-a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,d)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,c)\right)\cdot(b-a).$$

Die Funktion $y\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y)$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Daher gibt es ein $\eta\in(c,d)$, sodass

$$F'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, c) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot (d-c) \quad \text{und somit}$$

$$\Box f(a,b,c,d) = F'(\xi) \cdot (b-a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot (b-a)(d-c).$$

Bemerkungen: 1) Lemma 108 ist eine zweidimensionale Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

2) Aus Symmetriegründen gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 108 auch:

$$\exists (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in (a,b) \times (c,d) : \Box f(a,b,c,d) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot (b-a) \cdot (d-c).$$

17.12.2024

Satz 109 (Satz von SCHWARZ für $m=2$) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^2(U)$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in U.$$

Beweis: Es sei $(a,b) \in U$. Wähle ein $h > 0$, sodass $[a, a+h] \times [b, b+h] \subseteq U$. Nach Lemma 108 gibt es $(\xi, \eta), (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in (a, a+h) \times (b, b+h)$, sodass

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \Box f(a, a+h, b, b+h) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$$

und daher $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. Lasse nun $h \to 0+$ gehen. Dann geht auch $(a+h, b+h) \to (a,b)$ und daher $(\xi, \eta) \to (a,b)$ und $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \to (a,b)$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ folgt $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \xrightarrow[h \to 0+]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \xrightarrow[h \to 0+]{} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$,

also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$

Korollar 110 (Satz von SCHWARZ für $m \geq 2$) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^m(U)$, so kommt es bei partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ von f nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

Beweisskizze: Durch anwenden von Satz 109 auf x_i und x_j (für $1 \leq i, j \leq k$ und $i \neq j$) erhält man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. Bei Ableitungen höherer Ordnung kann man nach Satz 109 unmittelbar aufeinander folgende Ableitungen vertauschen. Durch sukzessives Vertauschen kann man nun zeigen, dass partielle Ableitungen höherer Ordnung übereinstimmen, die sich nur durch die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unterscheiden.