## 2.5 Stetigkeit von Funktionen

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$. Dann heißt $f$ stetig bei $\underline{x}_0$ wenn

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, sodass $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta, \underline{x} \in D \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon$

Satz 100 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$.

(i) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(a) $f$ ist stetig in $\underline{x}_0$,

(b) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, sodass $f(B_\delta(\underline{x}_0) \cap D) \subseteq B_\varepsilon(f(\underline{x}_0))$,

(ii) Ist $\underline{x}_0$ kein Häufungspunkt von $D$, so ist $f$ stetig in $\underline{x}_0$,

(iii) Ist $\underline{x}_0$ Häufungspunkt von $D$, so sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(a) $f$ ist stetig in $\underline{x}_0$,

(b) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$

(c) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = f_j(\underline{x}_0)$ für $1 \le j \le l$ (wobei $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_l(\underline{x}))$).

Beweis: (i) Folgt aus $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \Leftrightarrow \underline{x} \in B_\delta(\underline{x}_0)$ und $\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon \Leftrightarrow f(\underline{x}) \in B_\varepsilon(f(\underline{x}_0))$

(ii) Ist $\underline{x}_0$ kein Häufungspunkt von $D$, so $\exists \delta > 0 \ \forall \underline{x} \in D, \underline{x} \neq \underline{x}_0 : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \ge \delta$.

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für das eben gefundene $\delta > 0$ ist die definierende Bedingung der Stetigkeit erfüllt, denn $\underline{x}_0$ ist der einzige Punkt von $\mathbb{R}^k$, der $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta, \underline{x} \in D$ erfüllt und $\|f(\underline{x}_0) - f(\underline{x}_0)\| = 0 < \varepsilon$.

(iii) (a) $\Leftrightarrow$ (b) Folgt aus der Definition des Grenzwerts (Seite 74) und der Definition der Stetigkeit im Punkt $\underline{x}_0$

(b) $\Leftrightarrow$ (c) Folgt aus Satz 98.

Satz 101 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f, g: D \to \mathbb{R}^l$ seien beide stetig in $\underline{x}_0$

(i) $f + g: D \to \mathbb{R}^l$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) + g(\underline{x})$ ist stetig in $\underline{x}_0$,

(ii) $D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \langle f(\underline{x}), g(\underline{x}) \rangle$ ist stetig in $\underline{x}_0$

(Insbesondere gilt für $l = 1$: $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})$ ist stetig in $\underline{x}_0$)

(iii) $D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \|f(\underline{x})\|$ ist stetig in $\underline{x}_0$

(iv) $\lambda f: D \to \mathbb{R}^l$, $\underline{x} \mapsto \lambda f(\underline{x})$ ist stetig in $\underline{x}_0$ (für $\lambda \in \mathbb{R}$),

(v) Ist $l = 1$ und $f(\underline{x}_0) \neq 0$, so ist $\frac{1}{f}: \{\underline{x} \in D \mid f(\underline{x}) \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \frac{1}{f(\underline{x})}$ ist stetig in $\underline{x}_0$.

Beweis: (i) Ist $\underline{x}_0$ kein Häufungspunkt von $D$, so ist wegen Satz 100 (ii) nichts zu beweisen.

Ist $\underline{x}_0$ Häufungspunkt von $D$, so gelten $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$ und $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = g(\underline{x}_0)$ nach Satz 100 (iii). Aus Satz 99 (i) folgt $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) = f(\underline{x}_0) + g(\underline{x}_0)$. und $f + g$ ist stetig in $x_0$ (wieder nach Satz 100 (iii)).

(ii) — (v) Beweist man analog.

<u>Satz 102</u> Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $E \subseteq \mathbb{R}^l$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}^m$ und $\underline{x}_0 \in D$. Ist $f$ stetig in $\underline{x}_0$ und $g$ stetig in $f(\underline{x}_0)$, so ist $g \circ f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig bei $\underline{x}_0$.

<u>Beweis</u>: Es sei $\varepsilon > 0$. Da $g$ in $f(\underline{x}_0)$ stetig ist, $\exists \tau > 0$, sodass

$$\|y - f(\underline{x}_0)\| < \tau,\ y \in E \implies \|g(y) - g(f(\underline{x}_0))\| < \varepsilon$$

Da $f$ in $\underline{x}_0$ stetig ist, $\exists \delta > 0$, sodass

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta,\ \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \tau \implies \|g(f(\underline{x})) - g(f(\underline{x}_0))\| < \varepsilon$$

9.12.2024

<u>Definition</u>: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$

1) $f$ heißt stetig (auf $D$), wenn $f$ in jedem Punkt $\underline{x} \in D$ stetig ist, d.h.

$$\forall \underline{x} \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \|y - \underline{x}\| < \delta,\ y \in D \implies \|f(y) - f(\underline{x})\| < \varepsilon$$

2) $f$ heißt gleichmäßig stetig (auf $D$), wenn

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$, sodass für $\underline{x}, \underline{y} \in D$ mit $\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta$ stets $\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| < \varepsilon$ gilt

<u>Bemerkung</u>: Wie im eindimensionalen gelten:

1) Bei einer stetigen Funktion kann $\delta$ sowohl von $\underline{x}$ als auch von $\varepsilon$ abhängen, bei einer gleichmäßig stetigen darf $\delta$ nur von $\varepsilon$ abhängen.

2) Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt Stetigkeit, die Umkehrung gilt nicht.

3) Ob eine Funktion gleichmäßig stetig ist, hängt auch vom Definitionsbereich ab. Es ist möglich, dass eine Funktion auf einem Definitionsbereich $D$ gleichmäßig stetig, aber nicht auf einem größeren Definitionsbereich $E$ (d.h. $D \subsetneq E$).

<u>Beispiele</u>: 1) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $F_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $F_j(\underline{x}) = F_j(x_1, \dots, x_k) = f(x_j)$ stetig (für $1 \le j \le k$). Es sei $\varepsilon > 0$ und $\underline{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k}) \in \mathbb{R}^k$. Da $f$ bei $x_{0j}$ stetig ist

$$\exists \delta > 0, \text{ sodass } |x_j - x_{0j}| < \delta \implies |f(x_j) - f(x_{0j})| < \varepsilon$$

Es sei $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$. Aus $|x_j - x_{0j}| \le \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$ folgt

$$|F_j(\underline{x}) - F_j(\underline{x}_0)| = |f(x_j) - f(x_{0j})| < \varepsilon,$$ d.h. $F_j$ ist bei $\underline{x}_0$ stetig.

z.B. sind $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 e^x$ oder $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = (y^2 + 2y + 5)\sin y$ stetig

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 \sin y, e^{x+y})$ ist stetig (d.h. $f_1(x,y) = x^2 \sin y$, $f_2(x,y) = e^{x+y}$)

Nach Bsp 1) sind $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin y$ stetig.

Wegen Satz 101 (ii) ist $f_1(x,y) = x^2 \sin y$ stetig.

Nach Bsp 1) sind $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$ stetig. Wegen Satz 101 (i) ist $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ stetig. Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt aus Satz 102, dass $f_2(x,y) = e^{x+y}$ stetig ist. Da $f_1$ und $f_2$ stetig sind, folgt aus Satz 100 (iii), dass $f$ stetig ist.

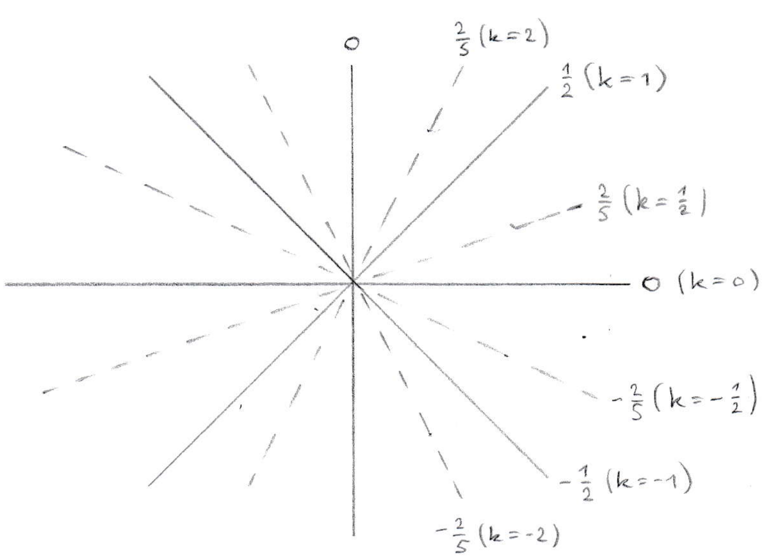
3) Ist $p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, d.h. $p(\underline{x}) = \sum\limits_{i_1=0}^{d_1}\cdots\sum\limits_{i_k=0}^{d_k} a_{i_1,\dots,i_k}\, x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ mit $a_{i_1,\dots,i_k}\in\mathbb{R}$ (für $0\le i_1\le d_1,\dots,0\le i_k\le d_k$), so ist $p$ stetig (nach Bsp 1) und Satz 101 (i), (ii) und (iv)).

4) Sind $p,q:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen und $q\neq 0$, so ist die rationale Funktion $\{\underline{x}\in\mathbb{R}^k \mid q(\underline{x})\neq 0\}\to\mathbb{R},\ \underline{x}\mapsto \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})}$ stetig (nach Bsp 3) und Satz 101 (ii) und (iv)).

5) Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Nach Bsp 4) ist $f$ in jedem Punkt $(x,y)\neq(0,0)$ stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist $f$ nicht stetig. Ist $y=kx$ (für ein $k\in\mathbb{R}$) und $x\neq 0$, so ist $f(x,y)=f(x,kx) = \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2}$, d.h. $f$ nimmt auf Geraden durch den Ursprung (diesen selbst ausgenommen) konstante Werte an:




Der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ kann nicht existieren, da $f$ beliebig nahe bei $(0,0)$ verschiedene Werte (z.B. $-\frac{1}{2}$, 0 und $\frac{1}{2}$) annimmt. (Mit Hilfe eindimensionaler reeller Analysis kann man zeigen, dass die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ k\mapsto\frac{k}{1+k^2}$ alle Werte im Intervall $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ annimmt.)

6) Jede lineare Funktion $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^l$ ist gleichmäßig stetig. Ist $f(\underline{e}_1)=\dots=f(\underline{e}_k)=\underline{0}$, so ist $f(\underline{x})=\underline{0}\ \forall x\in\mathbb{R}^k$ und die Behauptung ist erfüllt. Falls nicht, so sei $M:=\max\{\|f(\underline{e}_1)\|,\dots,\|f(\underline{e}_k)\|\}>0$. Ist $\|\underline{x}-\underline{x}_0\|<\frac{\varepsilon}{kM}$, so ist

$$\|f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)\| = \|f(\underline{x}-\underline{x}_0)\| = \Big\|\sum_{j=1}^{k}(x_j-x_{0j})f(\underline{e}_j)\Big\| \le \sum_{j=1}^{k}\|(x_j-x_{0j})f(\underline{e}_j)\|$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\underbrace{|x_j-x_{0j}|}_{\le\|\underline{x}-\underline{x}_0\|}\cdot\underbrace{\|f(\underline{e}_j)\|}_{\le M} \le k\cdot\frac{\varepsilon}{kM}\cdot M=\varepsilon$$

(mit $\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)$ und $\underline{x}_0=(x_{01},\dots,x_{0k})$).

**Satz 103** Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^\ell$. Äquivalent sind:

(i) $f$ ist in $\underline{x}_0$ stetig,

(ii) Ist $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(\underline{x}_n) = f(\underline{x}_0)$.

**Beweis:** (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0$, sodass

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta,\ \underline{x} \in D \ \Rightarrow\ \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0$, gilt: $\exists N \geq 1$, sodass $\|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \delta \ \forall n \geq N$. Daraus folgt

$\|f(\underline{x}_n) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon \ \forall n \geq N$ und daher $\lim\limits_{n\to\infty} f(\underline{x}_n) = f(\underline{x}_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $f$ bei $\underline{x}_0$ nicht stetig, so

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \underline{x} \in D \text{ mit } \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \text{ aber } \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_n)\| \geq \varepsilon$$

Insbesondere folgt, dass

$$\forall n \geq 1\ \exists \underline{x}_n \in D \text{ mit } \|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \tfrac{1}{n} \text{ aber } \|f(\underline{x}_n) - f(\underline{x})\| \geq \varepsilon.$$

D.h. $\underline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x}_0$ aber $f(\underline{x}_n) \underset{n\to\infty}{\not\to} f(\underline{x}_0)$

10.12.2024

**Satz 104** Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $f: D \to \mathbb{R}^\ell$. Äquivalent sind:

(i) $f$ ist stetig,

(ii) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^\ell$ offen, so gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$, sodass $f^{-1}(V) = D \cap U$,
(D.h. Urbilder offener Mengen sind unter einer stetigen Abbildung – in diesem Sinn – offen.)

(iii) Ist $B \subseteq \mathbb{R}^\ell$ abgeschlossen, dann gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$, sodass $f^{-1}(B) = D \cap A$.
(D.h. Urbilder abgeschlossener Mengen sind unter einer stetigen Abbildung – in diesem Sinn – abgeschlossen)

**Beweis:** (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $\underline{x} \in f^{-1}(V)$, so ist $f(\underline{x}) \in V$. Da $V$ offen ist,

$\exists \varepsilon(\underline{x}) > 0 : B_{\varepsilon(\underline{x})}(f(\underline{x})) \subseteq V$. Da $f$ stetig ist, folgt aus Satz 100 (i), dass

$\exists \delta(\underline{x}) > 0 : f(D \cap B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x})) \subseteq B_{\varepsilon(\underline{x})}(f(\underline{x})) \subseteq V$. Also ist

$D \cap B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}) \subseteq f^{-1}(V) \ \forall \underline{x} \in f^{-1}(V)$. Setze $U := \bigcup\limits_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x})$. Dann ist

$U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und

$$D \cap U = D \cap \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}) = \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} \underbrace{(D \cap B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}))}_{\subseteq f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V).$$

Umgekehrt ist $f^{-1}(V) \subseteq D$ und $f^{-1}(V) \subseteq \bigcup\limits_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}) \subseteq U$.

Also ist auch $f^{-1}(V) \subseteq D \cap U$ und daher $f^{-1}(V) = D \cap U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\underline{x} \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da $B_\varepsilon(f(\underline{x}))$ offen ist, gibt es nach Voraussetzung ein $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, sodass $f^{-1}(B_\varepsilon(f(\underline{x}))) = D \cap U$. Da $\underline{x} \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(\underline{x}))) \subseteq U$ und $U$ offen ist, $\exists \delta > 0: B_\delta(\underline{x}) \subseteq U$ und daher $B_\delta(\underline{x}) \cap D \subseteq U \cap D = f^{-1}(B_\varepsilon(f(\underline{x})))$. Daraus folgt $f(B_\delta(\underline{x}) \cap D) \subseteq B_\varepsilon(f(\underline{x}))$ und $f$ ist stetig in $\underline{x}$ nach Satz 100 (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist $B \subseteq \mathbb{R}^l$ abgeschlossen, so ist $\mathbb{R}^l \setminus B$ offen und nach Voraussetzung $\exists U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, sodass $f^{-1}(\mathbb{R}^l \setminus B) = U \cap D$. Daher ist $f^{-1}(B) = (\mathbb{R}^k \setminus U) \cap D$, wobei $A := \mathbb{R}^k \setminus U \ (\subseteq \mathbb{R}^k)$ abgeschlossen ist.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, so ist $\mathbb{R}^l \setminus V$ abgeschlossen und nach Voraussetzung $\exists A \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen, sodass $f^{-1}(\mathbb{R}^l \setminus V) = A \cap D$. Daher ist $f^{-1}(V) = (\mathbb{R}^k \setminus A) \cap D$, wobei $U := \mathbb{R}^k \setminus A$ offen ist.

Beispiele: 1) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Betrachte $f^{-1}((\alpha,\beta))$ mit $\alpha < \beta$:

$$f^{-1}((\alpha,\beta)) = \begin{cases} (-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}) \cup (\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}) & \text{falls } 0 \le \alpha < \beta \\ \quad (\text{insbesondere ist } f^{-1}((0,\beta)) = (-\sqrt{\beta}, 0) \cup (0, \sqrt{\beta}) \text{ falls } \alpha = 0) & \\ (-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) & \text{falls } \alpha < 0 < \beta \\ \emptyset & \text{falls } \alpha < \beta \le 0 \end{cases}$$

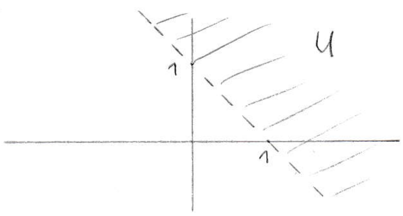
2) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$, so ist $f^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \{0\}$

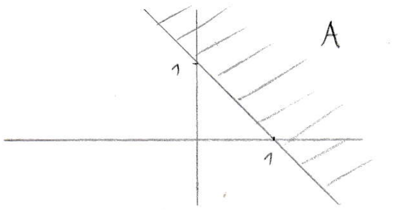
(Die Funktion $f = \operatorname{sgn}$ ist bei 0 nicht stetig, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist ein offenes Intervall, aber $f^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \{0\}$ ist nicht offen.)

Bemerkung: Die einfachste Möglichkeit, zu zeigen, dass eine Menge offen bzw. abgeschlossen ist, ist oft, zu zeigen, dass sie das Urbild einer offenen bzw. abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung ist.

Beispiele: 1) Für $1 \le i \le k$ sei $f_i: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f_i(\underline{x}) = x_i$. Aus Satz 104 folgt, dass $H_i^{c+}$ und $H_i^{c-}$ (für $c \in \mathbb{R}$) offen sind, da $H_i^{c+} = f_i^{-1}((c,+\infty))$ und $H_i^{c-} = f_i^{-1}((-\infty,c))$. Ebenso folgt, dass $\overline{H}_i^{c+}$ und $\overline{H}_i^{c-}$ abgeschlossen sind, da $\overline{H}_i^{c+} = f_i^{-1}([c,+\infty))$ und $\overline{H}_i^{c-} = f_i^{-1}((-\infty,c])$.

2) Es sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 1\}$ und $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \ge 1\}$. Die Menge $U$ ist offen (bzw. die Menge $A$ ist abgeschlossen) nach Satz 104, da $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$ stetig ist (Bsp. 3) auf Seite 78) und $U = f^{-1}((1,+\infty))$ (bzw. $A = f^{-1}([1,+\infty))$).



**Satz 105** Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann ist $f(K)\ (\subseteq \mathbb{R}^l)$ kompakt.

**Beweis:** Es sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $f(K)$. Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein $\underline{x}_n \in K$ mit $f(\underline{x}_n) = y_n$. Da $K$ kompakt ist, besitzt die Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ nach Satz 95 eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} = \underline{a} \in K$. Da $f$ stetig ist, folgt aus Satz 103

$\lim_{n\to\infty} y_{n_j} = \lim_{n\to\infty} f(\underline{x}_{n_j}) = f(\underline{a}) \in f(K)$. D.h. $(y_{n_j})_{j\geq 1}$ ist eine konvergente Teilfolge von $(y_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert in $f(K)$. Nach Satz 95 ist $f(K)$ kompakt.

**Korollar 106** Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\underline{a}^+, \underline{a}^- \in K$, sodass $f(\underline{a}^+) = \max_{\underline{x}\in K} f(\underline{x})$ und $f(\underline{a}^-) = \min_{\underline{x}\in K} f(\underline{x})$. D.h. eine stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ nimmt auf einer kompakten Menge ihr Minimum und Maximum an.

**Beweis:** Nach Satz 105 ist $f(K)\ (\subseteq \mathbb{R})$ kompakt und daher beschränkt. Also existieren $\sup f(K) = \sup_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) =: M$ und $\inf f(K) = \inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) =: m$.

Es gilt nun: $\forall n \geq 1\ \exists \underline{x}_n \in K: M - \frac{1}{n} < f(\underline{x}_n) \leq M$. Die Folge $(f(\underline{x}_n))_{n\geq 1}$ ist konvergent mit Grenzwert $M = \lim_{n\to\infty} f(\underline{x}_n)$. Da $f(K)$ kompakt ist, ist $f(K)$ abgeschlossen und daher $M \in f(K)$. Also $\exists \underline{a}^+ \in K: f(\underline{a}^+) = M$.

Da $f: K \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist auch $-f: K \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto -f(\underline{x})$ stetig. Daher gibt es $\underline{a}^- \in K$, sodass $-f(\underline{a}^-) = \sup_{\underline{x}\in K}(-f(\underline{x})) = -\inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x})$ und daher $f(\underline{a}^-) = \inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) = m$.

**Beispiele:** 1) Korollar 106 verallgemeinert folgende Aussage aus der eindimensionalen reellen Analysis: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt die Funktion $f$ auf $[a,b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an.

2) Ist $K = [a,b] \times [c,d]\ (\subseteq \mathbb{R}^2)$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$, so ist $K$ kompakt und $f$ stetig (da linear). Nach Satz 105 ist $f(K)\ (\subseteq \mathbb{R}^2)$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen.

3) Ist $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt $f$ auf $K$ sein Minimum und Maximum an. (Nach Satz 100 (ii) ist $f$ in $\frac{1}{n} \in K$ stetig für alle $n \geq 1$ und nach Satz 100 (iii) ist die Stetigkeit von $f$ daher äquivalent zu $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.)

11.12.2024

**Satz 107** Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann ist $f$ gleichmäßig stetig.

**Beweis:** Wäre $f$ nicht gleichmäßig stetig, so würde gelten, dass

$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \underline{x}_\delta, \underline{y}_\delta \in K$ mit $\|\underline{x}_\delta - \underline{y}_\delta\| < \delta$ und $\|f(\underline{x}_\delta) - f(\underline{y}_\delta)\| \geq \varepsilon$.

Es folgt, dass $\forall n \geq 1 \ \exists \underline{x}_n, \underline{y}_n \in K$ mit $\|\underline{x}_n - \underline{y}_n\| < \frac{1}{n}$ und $\|f(\underline{x}_n) - f(\underline{y}_n)\| \geq \varepsilon$.

Da $K$ kompakt ist, besitzt $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ nach Satz 95 eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$

mit Grenzwert $\underline{a} := \lim\limits_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$. Weil

$$\|\underline{y}_{n_j} - \underline{a}\| \leq \underbrace{\|\underline{y}_{n_j} - \underline{x}_{n_j}\|}_{< \frac{1}{n_j} \to 0} + \underbrace{\|\underline{x}_{n_j} - \underline{a}\|}_{\to 0} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

gilt auch $\lim\limits_{j\to\infty} \underline{y}_{n_j} = \underline{a}$. Da $f$ stetig ist, folgt aus Satz 103

$\lim\limits_{j\to\infty} f(\underline{x}_{n_j}) = \lim\limits_{j\to\infty} f(\underline{y}_{n_j}) = f(\underline{a})$ und daher $\lim\limits_{j\to\infty} \left(f(\underline{x}_{n_j}) - f(\underline{y}_{n_j})\right) = \underline{0}$.

Das ist ein Widerspruch zu $\|f(\underline{x}_n) - f(\underline{y}_n)\| \geq \varepsilon \ \forall n \geq 1$.

Bemerkung: Satz 107 verallgemeinert einen Satz aus der eindimensionalen reellen Analysis, der besagt, dass eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.