

## 2.3 Funktionen in mehreren Veränderlichen

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  (mit  $D \neq \emptyset$ ). Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^l$  ordnet jedem  $k$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_k) \in D$  (genau) ein  $l$ -Tupel  $y = (y_1, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^l$  zu. Man schreibt dafür

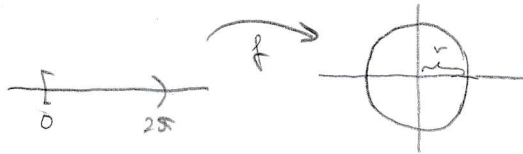
$$y = (y_1, \dots, y_l) = f(x) = f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x), \dots, f_l(x)) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_l(x_1, \dots, x_k)),$$

wobei  $f_1, \dots, f_l: D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen sind. (Welche Schreibweise man verwendet, hängt davon ab, was man betonen will.)

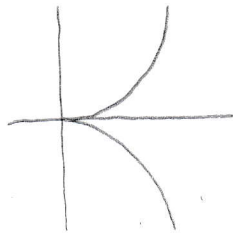
Beispiele im Fall  $k=1$ : Ist  $k=1$  und  $D$  ein Intervall (also z.B.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  oder  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ), so kann sich  $f$  oft als Parametrisierung einer Kurve vorstellen.

1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (bzw.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ),  $f(t) = x + ty$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^2$  (bzw.  $x, y \in \mathbb{R}^3$ ) und  $y \neq 0$  ist Parameterdarstellung einer Geraden.

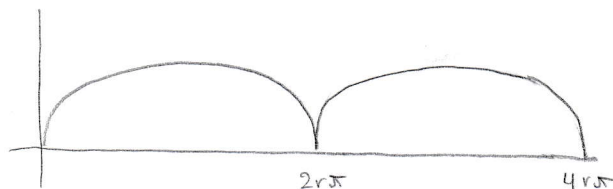
2)  $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (r \cos t, r \sin t)$  und  $r > 0$  ist Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt  $0$  und Radius  $r$ .



3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (t^2, t^3)$  ist Parametrisierung der NEIL'schen Parabel



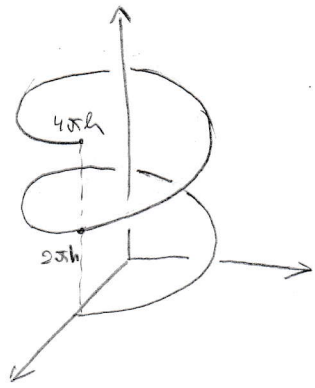
4)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$  mit  $r > 0$  ist Parametrisierung einer ZYKLOIDE, d.h. der Kurve, die von einem Randpunkt eines rollenden Kreises mit Radius  $r$  beschrieben wird



5) Ist  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so ist  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $g(x) = (x, f(x))$  der Graph von  $f$ .

(Allgemein gilt: Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^k$  und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x), \dots, f_l(x))$ , so bezeichnet man  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^{k+l}$ ,  $g(x) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_l(x))$  als Graph von  $f$ .)

6)  $f: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$  mit  $r, h > 0$  ist ein Stück einer Schraubenlinie mit Ganghöhe  $2\pi h$ .



Beispiele im Fall  $l=1$ , d.h. Abbildungen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}^k$

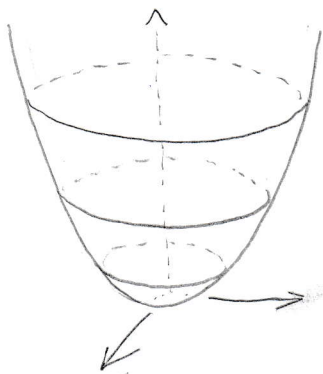
1)  $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_k=0}^{m_k} c_{i_1, \dots, i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}$  sind Polynomfunktionen (oder auch ganzrationale Funktionen) wobei  $c_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$  für  $0 \leq i_1 \leq m_1, \dots, 0 \leq i_k \leq m_k$

2) Ein wichtiger Spezialfall von Bsp 1) sind quadratische Formen

$$q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, q(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} x_i x_j \quad \text{mit } c_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq i, j \leq k.$$

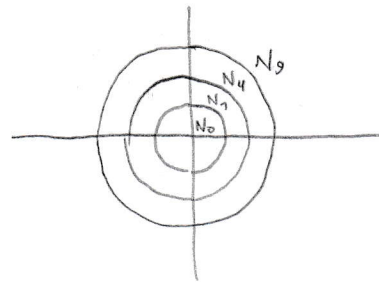
z.B. für  $k=2$ :  $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Der Graph von  $q$  ist ein Paraboloid



Niveaumengen

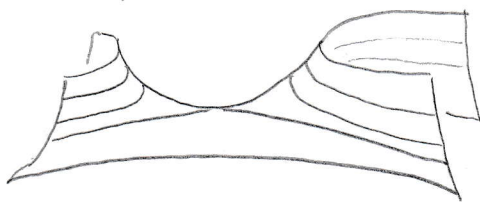
(„Höhenschichtlinien“)



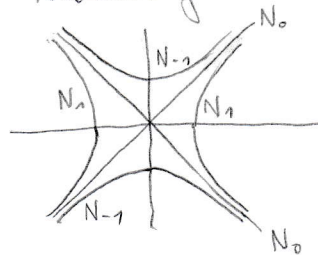
Formel: Ist  $D \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so nennt man  $N_c = \{x \in D \mid f(x) = c\}$  Niveaumenge

Noch eine quadratische Form:  $q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

Der Graph von  $q$  ist eine Sattelfläche



Niveaumengen:



Dabei ist:  $N_0: x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm x_1$

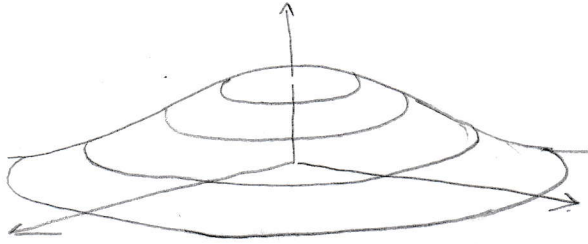
$N_1: x_1^2 - x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 + 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm \sqrt{x_2^2 + 1}$

$N_{-1}: x_1^2 - x_2^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = x_1^2 + 1 \Leftrightarrow x_2 = \pm \sqrt{x_1^2 + 1}$

3) Sind  $p, q: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Polynomfunktionen und  $D = \{x \in \mathbb{R}^k \mid q(x) \neq 0\}$ , so ist

$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  eine rationale Funktion

4)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$



Beispiel (für  $k, l$  beliebig): Lineare Funktionen  $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l, f(x) = A \cdot x$  mit  $A \in \mathbb{R}^{l \times k}$   
(siehe Satz 59).

←  
4.12.2024