2.2 Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Definition: Es sei $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$. Wir verwenden die Bezeichnung
$B_r(\underline{x}) = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \|\underline{y} - \underline{x}\| < r \}$ (Ball mit Radius r um $\underline{x}$)

Bemerkung: Für $k = 1$ ist $B_r(x)$ das Intervall $(x-r, x+r)$.

Definition: Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt offen wenn $\forall \underline{x} \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U$.

Satz 91 (i) Ist $I (\neq \emptyset)$ eine (Index)Menge und $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$ offen $\forall i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ ebenfalls offen,
(ii) Ist $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$ offen für $1 \leq i \leq m$, so ist $U_1 \cap \dots \cap U_m$ ebenfalls offen.
D.h. die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Beweis: (i) Es sei $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Ist $\underline{x} \in U$, so $\exists j \in I : \underline{x} \in U_j$. Da U_j offen ist,
$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U_j \subseteq U$.

(ii) Es sei $\underline{x} \in U_1 \cap \dots \cap U_m$. Dann ist $\underline{x} \in U_i$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Da $U_1, \dots, U_m$ offen sind, gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(\underline{x}) \subseteq U$. Es sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq B_{\varepsilon_i}(\underline{x}) \subseteq U_i$ für $1 \leq i \leq m$. Daher ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m$.

Beispiele für offene Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1) Offene, beschränkte Intervalle (a, b) (mit $a < b$). Für $x \in (a, b)$ sei $\varepsilon := \min\{x-a, b-x\}$.
Dann ist $B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a, b)$ (da $x - \varepsilon \geq x - (x-a) = a$ und $x + \varepsilon \leq x + b - x = b$).

2) Offene, unbeschränkte Intervalle $(a, +\infty)$ (mit $a \in \mathbb{R}$). Für $x \in (a, +\infty)$ sei $\varepsilon := x - a$.
Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq (a, +\infty)$.

3) Offene, unbeschränkte Intervalle $(-\infty, a)$ (mit $a \in \mathbb{R}$).

4) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$: Es ist trivial, dass $\mathbb{R}$ offen ist (z.B. weil $B_1(x) \subseteq \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R}$)
und $\emptyset$ ist offen, da die definierende Eigenschaft leer erfüllt ist.

5) Es seien $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ reelle Zahlen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ offen, da
$\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_m\} = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup \dots \cup (a_{m-1}, a_m) \cup (a_m, +\infty)$ eine Vereinigung offener Mengen ist

Bemerkung: Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen braucht nicht offen zu sein
z.B. ist die Menge $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + \frac{1}{n})$ $(\subseteq \mathbb{R})$ nicht offen, da $G = (0, 1]$. (Es ist $1 \in G$, aber es gibt kein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $B_\varepsilon(1) \subseteq G$.

Beispiele für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$

1) Es sei $1 \le i \le k$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $H_i^{c+} := \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i > c\}$ und $H_i^{c-} := \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i < c\}$ offen. (Für $k=2$ sind das offene Halbebenen.)
Für $\underline{x} \in H_i^{c\pm}$ sei $\varepsilon := |x_i - c|$. Dann ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq H_i^{c\pm}$. (Für $\underline{x} \in H_i^{c+}$ und $y \in B_\varepsilon(\underline{x})$ gilt ja z.B. $y_i > x_i - \varepsilon = x_i - (x_i - c) = c$.)

2) Für $1 \le i \le k$ seien $c_i < d_i$ reelle Zahlen. Dann ist der k-dimensionale offene Quader

$$(c_1,d_1) \times (c_2,d_2) \times \dots \times (c_k,d_k) = \prod_{j=1}^{k} (c_i,d_i) = \{\underline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{R}^k \mid c_i < x_i < d_i \text{ für } 1 \le i \le k\}$$

offen, da $(c_1,d_1) \times \dots \times (c_k,d_k) = H_1^{c_1+} \cap \dots \cap H_k^{c_k+} \cap H_1^{d_1-} \cap \dots \cap H_k^{d_k-}$ endlicher Durchschnitt offener Mengen ist.

3) $\mathbb{R}^k$ und $\emptyset$ sind offen. Das ist wieder trivial bzw. leer erfüllt wie im Fall $k=1$.

4) Es seien $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^k$. Dann ist $\mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ offen. Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ sei $\varepsilon := \min\{\|\underline{x} - \underline{a}_1\|, \dots, \|\underline{x} - \underline{a}_m\|\}$. Dann ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$.

5) Es sei $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(\underline{a})$ offen. Es sei $\underline{x} \in B_r(\underline{a})$, d.h. $\|\underline{x} - \underline{a}\| < r$. Es sei $\varepsilon := r - \|\underline{x} - \underline{a}\|$. Dann ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq B_r(\underline{a})$, denn für $y \in B_\varepsilon(\underline{x})$ gilt $\|y - \underline{x}\| < \varepsilon = r - \|\underline{x} - \underline{a}\|$ und daher $\|y - \underline{a}\| \le \|y - \underline{x}\| + \|\underline{x} - \underline{a}\| < \varepsilon$, d.h. $y \in B_r(\underline{a})$.

6) $U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ ist offen. Es sei $\underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $x_2 \neq 0$. Es sei $\varepsilon := |x_2|$. Ist $y \in B_\varepsilon(\underline{x})$, so ist $|y_2 - x_2| \le \|y - \underline{x}\| < \varepsilon = |x_2|$ und daher $|y_2| = |x_2 + (y_2 - x_2)| \ge \big||x_2| - |y_2 - x_2|\big| \ge |x_2| - |y_2 - x_2| > 0$, d.h. $y_2 \neq 0$ und $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U$.

Definition: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^k \setminus A$ offen ist.

Satz 92 (i) Ist $I (\neq \emptyset)$ eine (Index)Menge und $A_i \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen $\forall i \in I$, so ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen,
(ii) Ist $A_i \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen für $1 \le i \le m$, so ist $A_1 \cup \dots \cup A_m$ ebenfalls abgeschlossen.
D.h. der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Beweis: (i) Für jedes $i \in I$ sei $U_i = \mathbb{R}^k \setminus A_i$. Dann ist U_i offen und $A_i = \mathbb{R}^k \setminus U_i$. Nach Satz 91 (i) ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen und daher $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^k \setminus U_i) = \mathbb{R}^k \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ offen
(ii) Für $i \in \{1, \dots, m\}$ sei $U_i = \mathbb{R}^k \setminus A_i$. Dann ist U_i offen und $A_i = \mathbb{R}^k \setminus U_i$. Nach Satz 91 (ii) ist $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ offen und daher $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} (\mathbb{R}^k \setminus U_i) = \mathbb{R}^k \setminus \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ abgeschlossen.

27.11.2024

Definition: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$.
Ein Punkt $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ heißt Häufungspunkt von M wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in M, y \neq \underline{x}: \|y - \underline{x}\| < \varepsilon$.
Ein Punkt $\underline{x} \in M$ heißt isolierter Punkt von M wenn $\exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(\underline{x}) \cap M = \{\underline{x}\}$.

Satz 93 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$. Äquivalent sind:

(i) $\underline{x}$ ist Häufungspunkt von M,

(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $\underline{y} \in M, \underline{y} \neq \underline{x}$ mit der Eigenschaft $\|\underline{y} - \underline{x}\| < \varepsilon$,

(iii) Es gibt eine Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ in M, derart dass $\underline{x}_n \neq \underline{x}$ $\forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii) Da $\underline{x}$ Häufungspunkt von M ist, gilt: $\forall n \geq 1\ \exists \underline{x}_n \in M, \underline{x}_n \neq \underline{x} : \|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \frac{1}{n}$. Dann ist $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in M, die $\underline{x}_n \neq \underline{x}$ $\forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}$ erfüllt.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1$, sodass $\|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Ist $\underline{y} \in \{\underline{x}_n \mid n \geq n_0\}$, so ist $\underline{y} \in M, \underline{y} \neq \underline{x}$ und $\|\underline{y} - \underline{x}\| < \varepsilon$. Die Menge $\{\underline{x}_n \mid n \geq n_0\}$ ist unendlich, da andernfalls $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}$ unmöglich wäre

(ii) $\Rightarrow$ (i) Trivial

Bemerkung: Ein Häufungspunkt einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^k$ kann, aber muss nicht in M liegen. Ist z.B. $M = [0,1) \cup \{2\}$ $(\subseteq \mathbb{R})$, so sind alle $x \in [0,1)$ Häufungspunkte von M und Elemente von M. Der Punkt 1 ist Häufungspunkt von M aber $1 \notin M$. Der Punkt 2 ist isolierter Punkt von M (und daher kein Häufungspunkt von M).

Satz 94 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Äquivalent sind:

(i) A ist abgeschlossen,

(ii) Ist $\underline{x}_n \in A$ $\forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$, so ist $\underline{a} \in A$,

(iii) Ist $\underline{a}$ Häufungspunkt von A, so ist $\underline{a} \in A$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Angenommen $\underline{a} \notin A$, d.h. $\underline{a} \in \mathbb{R}^k \setminus A$. Da $\mathbb{R}^k \setminus A$ offen ist, $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$. Andererseits $\exists N \geq 1$ $\forall n \geq N : \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \varepsilon$ und daher $\underline{x}_n \in B_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$ $\forall n \geq N$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\underline{x}_n \in A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Da $\underline{a}$ Häufungspunkt von A ist, gibt es nach Satz 93 eine Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ in A mit der Eigenschaft $\underline{x}_n \neq \underline{a}$ $\forall n \geq 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$. Nach Voraussetzung ist $\underline{a} \in A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, $\mathbb{R}^k \setminus A$ wäre nicht offen. Dann würde gelten, dass $\exists \underline{a} \in \mathbb{R}^k \setminus A$ $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{a}) \not\subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$, d.h. $B_\varepsilon(\underline{a}) \cap A \neq \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0$. Insbesondere wäre $B_{1/n}(\underline{a}) \cap A \neq \emptyset$ $\forall n \geq 1$, d.h. $\forall n \geq 1\ \exists \underline{x}_n \in A : \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \frac{1}{n}$. Da $\underline{a} \notin A$ wäre dabei $\underline{x}_n \neq \underline{a}$ $\forall n \geq 1$. Da offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$, wäre $\underline{a}$ nach Satz 93 Häufungspunkt von A und daher nach Voraussetzung $\underline{a} \in A$, Widerspruch.

Beispiele für abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$

1) Abgeschlossene beschränkte Intervalle $[a,b]$ (mit $a \leq b$). Das folgt daraus, dass $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ offen ist oder (mit Hilfe von Satz 94): Ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge und $a \leq x_n \leq b$ $\forall n \geq 1$, so ist $a \leq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.

2) Abgeschlossene unbeschränkte Intervalle $[a,+\infty)$ (mit $a\in\mathbb{R}$). Folgt daraus, dass $\mathbb{R}\setminus[a,+\infty)=(-\infty,a)$ offen ist oder (mit Hilfe von Satz 94): Ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge und $x_n\geq a$ $\forall n\geq 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} x_n \geq a$

3) Abgeschlossene unbeschränkte Intervalle $(-\infty,a]$ (mit $a\in\mathbb{R}$).

4) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind abgeschlossen, weil $\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$ und $\mathbb{R}\setminus\emptyset=\mathbb{R}$ offen sind. Alternativ kann man auch Satz 94 verwenden: Dann ist es trivial, dass $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist und Bedingungen (ii) und (iii) von Satz 94 sind für $\emptyset$ leer erfüllt.

5) Sind $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}$, so ist $\{a_1,\dots,a_m\}$ abgeschlossen, da $\mathbb{R}\setminus\{a_1,\dots,a_m\}$ offen ist (siehe Bsp. 5 auf Seite 63).

6) Die Menge $A=\{\frac{1}{m}\mid m\geq 1\}\cup\{0\}$ ist abgeschlossen, da
$\mathbb{R}\setminus A=(-\infty,0)\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)\cup(1,+\infty)$ offen ist (als Vereinigung offener Mengen)

7) Es seien $A_0=[0,1]$, $A_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$, $A_2=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1]$, usw.
D.h. A_{m+1} entsteht aus A_m durch entfernen der (offenen) mittleren Drittel aller Intervalle, die A_m bilden. Für alle $m\geq 0$ ist A_m eine abgeschlossene Menge als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen. Es sei $C:=\bigcap_{m=0}^{\infty}A_m$. Die Menge C wird CANTOR sches Diskontinuum genannt. Sie ist abgeschlossen, da sie Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist.

<u>Bemerkung</u>: Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen braucht nicht abgeschlossen zu sein.

1) Die Menge $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,1-\frac{1}{n}]$ ist nicht abgeschlossen, da $F=[0,1)$ und $\mathbb{R}\setminus F=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ nicht offen ist bzw da die Folge $(1-\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ in F liegt, aber $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1\notin F$.

2) Die Menge $F=\{\frac{1}{m}\mid m\geq 1\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\frac{1}{m}\}$ ist nicht abgeschlossen, da
$\mathbb{R}\setminus F=(-\infty,0]\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1},\frac{1}{m}\right)\cup(1,+\infty)$ nicht offen ist bzw. da die Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ in F liegt aber $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\notin F$.

<u>Beispiele für abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$</u>:

1) Es sei $1\leq i\leq k$ und $c\in\mathbb{R}$. Dann sind $\overline{H}_i^{c+}=\{\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k\mid x_i\geq c\}$ und $\overline{H}_i^{c-}=\{\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k\mid x_i\leq c\}$ abgeschlossen. (Für $k=2$ sind das abgeschlossene Halbebenen.) Das folgt daraus, dass $\mathbb{R}^k\setminus\overline{H}_i^{c+}=H_i^{c-}$ und $\mathbb{R}^k\setminus\overline{H}_i^{c-}=H_i^{c+}$ offen sind (siehe Bsp. 1) auf Seite 64).

2) Für $1 \leq i \leq k$ seien $c_i \leq d_i$ reelle Zahlen. Dann ist der k-dimensionale abgeschlossene Quader
$$[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]\times\cdots\times[c_k,d_k] = \prod_{j=1}^{k}[c_j,d_j] = \{\underline{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid c_i \leq x_i \leq d_i \text{ für } 1\leq i\leq k\}$$
abgeschlossen, da $[c_1,d_1]\times\cdots\times[c_k,d_k] = \overline{H}_1^{c_1+}\cap\cdots\cap\overline{H}_k^{c_k+}\cap\overline{H}_1^{d_1-}\cap\cdots\cap\overline{H}_k^{d_k-}$ ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist.

3) $\mathbb{R}^k$ und $\emptyset$: Wie im Fall $k=1$ (siehe Bsp 4) auf Seite 66).

4) Es seien $\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_m\in\mathbb{R}^k$. Dann ist $\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_m\}$ abgeschlossen, da $\mathbb{R}^k\setminus\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_m\}$ offen ist (siehe Bsp. 4) auf Seite 64).

5) Es sei $A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=0\}$, d.h. die x_1-Achse. Dann ist A abgeschlossen, da die Menge $\mathbb{R}^2\setminus A=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_2\neq 0\}$ offen ist (siehe Bsp. 6) auf Seite 64). Alternativ betrachte eine Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ mit $\underline{x}_n=(x_{n1},x_{n2})\in A$ und $\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n=\underline{a}=(a_1,a_2)$. Da $\underline{x}_n\in A$ $\forall n\geq 1$ ist $x_{n2}=0$ $\forall n\geq 1$ und daher $a_2=\lim_{n\to\infty}x_{n2}=0$, d.h. $\underline{a}\in A$.

2.12.2024

6) Es sei $r>0$ und $A=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^k \mid \|\underline{x}\|\leq r\}$, d.h. die „abgeschlossene Vollkugel" mit Mittelpunkt $\underline{0}$ und Radius r. Dann ist A eine abgeschlossene Menge. Es sei $\underline{x}_n\in A$ $\forall n\geq 1$ und $\underline{a}=\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n$. Da $\underline{x}_n\in A$ $\forall n\geq 1$ gilt $\|\underline{x}_n\|\leq r$ $\forall n\geq 1$ und daher
$$\|\underline{a}\| = \|\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n\| \overset{\text{Satz 89 (iv)}}{=} \lim_{n\to\infty}\|\underline{x}_n\| \leq r, \text{ d.h. } \underline{a}\in A.$$

Bemerkungen: 1) Eine Menge $M\subseteq\mathbb{R}^k$ kann durchaus weder offen noch abgeschlossen sein. Z.B. ist $M=[0,1)$ ($\subseteq\mathbb{R}$) nicht offen, da $0\in M$ aber $\nexists\,\varepsilon>0: B_\varepsilon(0)\subseteq M$. Aber M ist auch nicht abgeschlossen, da $1\in\mathbb{R}\setminus M=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ und $\nexists\,\varepsilon>0: B_\varepsilon(1)\subseteq\mathbb{R}\setminus M$.
Allgemeiner ist $M=[0,1)^k$ ($\subseteq\mathbb{R}^k$) weder offen noch abgeschlossen. Die Menge M ist nicht offen, da $\underline{0}\in M$ aber $\nexists\,\varepsilon>0: B_\varepsilon(\underline{0})\subseteq M$ und M ist nicht abgeschlossen, da $(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^k\setminus M$ aber $\nexists\,\varepsilon>0: B_\varepsilon(1,\dots,1)\subseteq\mathbb{R}^k\setminus M$.

2) Die Mengen $\emptyset$ ($\subseteq\mathbb{R}^k$) und $\mathbb{R}^k$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen (als Teilmengen des $\mathbb{R}^k$). Man kann zeigen, dass sie die einzigen beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^k$ mit dieser Eigenschaft sind.

Definition: Eine Menge $M\subseteq\mathbb{R}^k$ heißt beschränkt, wenn $\exists R>0: M\subseteq B_R(\underline{0})$.

Beispiele für beschränkte und unbeschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1) Es seien $a\leq b$ reelle Zahlen. Alle beschränkten Intervalle (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ und $[a,b]$ sind beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$, da $[a,b]\subseteq(-R,R)$ für $R=1+\max\{|a|,|b|\}$ (und $(a,b)\subseteq[a,b]$, $(a,b]\subseteq[a,b]$ und $[a,b)\subseteq[a,b]$).

2) Jede endliche Menge $\{a_1,\dots,a_m\}\subseteq\mathbb{R}$ ist beschränkt, da $\{a_1,\dots,a_m\}\subseteq B_R(0)$ mit $R=1+\max\{|a_1|,\dots,|a_m|\}$.

3) Sowohl $M=\{\frac{1}{n} \mid n\geq 1\}$ als auch $\overline{M}=\{0\}\cup\{\frac{1}{n} \mid n\geq 1\}$ sind beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$, da $M\subseteq\overline{M}\subseteq(-2,2)=B_2(0)$.

4) Das Cantorsche Diskontinuum C ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, da $C \subseteq [0,1] \subseteq (-2,2) = B_2(0)$.

5) $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind keine beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$. (Für jedes $R>0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}^+$ mit $m > R$.)

6) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Die unbeschränkten Intervalle $(-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty)$ und $[a, +\infty)$ sind nicht beschränkt.

Beispiele für beschränkte (und unbeschränkte) Teilmengen des $\mathbb{R}^k$.

1) $B_r(\underline{x})$ (mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r>0$) und $\overline{B_r(\underline{x})} = \{\underline{y} \in \mathbb{R}^k \mid \|\underline{y}-\underline{x}\| \le r\}$ sind beschränkt, da $B_r(\underline{x}) \subseteq \overline{B_r(\underline{x})} \subseteq B_R(\underline{0})$ mit $R = \|\underline{x}\| + r + 1$.

2) k-dimensionale Quader $(c_1,d_1)\times\cdots\times(c_k,d_k)$ und $[c_1,d_1]\times\cdots\times[c_k,d_k]$ sind beschränkt. Wegen $(c_1,d_1)\times\cdots\times(c_k,d_k) \subseteq [c_1,d_1]\times\cdots\times[c_k,d_k]$ reicht es zu zeigen, dass $[c_1,d_1]\times\cdots\times[c_k,d_k]$ beschränkt ist. Es ist $[c_1,d_1]\times\cdots\times[c_k,d_k] \subseteq \overline{B_r(\underline{x})}$, wobei $\underline{x}$ der Mittelpunkt des Quaders sei, d.h. $\underline{x} = \frac{1}{2}(c_1+d_1,\dots,c_k+d_k)$ und r der Abstand von $\underline{x}$ zu einem Eckpunkt des Quaders, d.h. $r = \frac{1}{2}\sqrt{(d_1-c_1)^2+\cdots+(d_k-c_k)^2}$. Die Behauptung folgt nun aus Bsp. 1).

3) Endliche Mengen $\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\}$ sind beschränkt, da $\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\} \subseteq B_R(\underline{0})$ mit $R = 1 + \max\{\|\underline{a}_1\|,\dots,\|\underline{a}_m\|\}$

4) Die Mengen H_i^{c-}, H_i^{c+}, $\overline{H}_i^{c-}$ und $\overline{H}_i^{c+}$ (mit $1 \le i \le k$ und $c \in \mathbb{R}$) sind nicht beschränkt.

Definition: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele für kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$

1) Alle beschränkten, kompakten Intervalle $[a,b]$ sind kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ (und werden darum oft auch „kompakte Intervalle" genannt).

2) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt.

3) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \ge 1\}$ ist kompakt

4) Das Cantorsche Diskontinuum ist kompakt.

Beispiele für kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^k$

1) $\overline{B_r(\underline{x})}$ (mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r>0$) ist kompakt.

2) Abgeschlossene k-dimensionale Quader $[c_1,d_1]\times\cdots\times[c_k,d_k]$ sind kompakt

3) Endliche Mengen $\{\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n\}$ sind kompakt

Satz 95 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$. Äquivalent sind:

(i) K ist kompakt,

(ii) Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K,

(iii) Jede unendliche Teilmenge von K besitzt einen Häufungspunkt in K.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $(\underline{x}_n)_{n\ge1}$ eine Folge in K, so ist $(\underline{x}_n)_{n\ge1}$ beschränkt. Nach Satz 90 (Satz von Bolzano-Weierstrass) besitzt $(\underline{x}_n)_{n\ge1}$ eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\ge1}$. Da K abgeschlossen ist, folgt $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$ nach Satz 94.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Wäre K unbeschränkt, so würde gelten dass $\forall n \geq 1\ \exists\, \underline{x}_n \in K : \|\underline{x}_n\| > n$.
Die Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ würde in K liegen, aber keine konvergente Teilfolge besitzen, da $\|\underline{x}_n - \underline{a}\| \geq \|\underline{x}_n\| - \|\underline{a}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ für jedes $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$. Also ist K beschränkt.

Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge in K. Dann besitzt $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$. Da $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$, folgt $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n \in K$, d.h. K ist abgeschlossen nach Satz 94.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Es sei M eine unendliche Teilmenge von K. Wähle daraus eine abzählbar unendliche Teilmenge $\{\underline{x}_n \mid n \geq 1\}$ von M (d.h. die $\underline{x}_n \in M$ sind paarweise verschieden). Dann ist $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K und besitzt nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit Grenzwert $\underline{a} := \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$. (Da die $\underline{x}_{n_j}$ paarweise verschieden sind, kann man $\underline{x}_{n_j} \neq \underline{a}\ \forall j \geq 1$ verlangen.) Nach Satz 93 ist $\underline{a}$ ein Häufungspunkt von M in K.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K und $M := \{\underline{x}_n \mid n \geq 1\}$.
Ist M endlich, so $\exists\, \underline{a} \in M : \underline{x}_n = \underline{a}$ für unendlich viele $n \geq 1$. D.h. es gibt eine Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit $\underline{x}_{n_j} = \underline{a}\ \forall j \geq 1$ und daher $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} = \underline{a} \in K$.

Ist M unendlich, so besitzt M nach Voraussetzung einen Häufungspunkt $\underline{a} \in K$. Dann gilt, dass $\forall j \geq 1\ \exists\, \underline{x}_{n_j} \in M$ mit der Eigenschaft $\|\underline{x}_{n_j} - \underline{a}\| < \frac{1}{j}$, wobei man $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ verlangen kann. Offenbar ist $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ eine Teilfolge von $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $\underline{a} = \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$.

3.12.2024

Bemerkungen: 1) Der Begriff der kompakten Menge ist „die richtige Verallgemeinerung" für beschränkte abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ in Mehrdimensionalen.

2) Kompaktheit wird meistens anders definiert, nämlich folgendermaßen: Eine Menge K heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D.h. ist $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen U_i (mit $i \in I$) und $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $K \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$. Diese Definition ist nach dem Satz von HEINE-BOREL zu unserer äquivalent. Sie eignet sich wesentlich besser für Verallgemeinerungen.

Korollar 96 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^k$ eine kompakte Menge und $A \subseteq \mathbb{R}^k$ eine abgeschlossene Menge, so ist $K \cap A$ eine kompakte Menge.

Beweis: Die Menge $K \cap A$ ist beschränkt, da $K \cap A \subseteq K$ und K eine beschränkte Menge ist. Die Menge $K \cap A$ ist abgeschlossen, da sie Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen ist.

Korollar 97 Ist $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, so ist $\bigcap_{m\geq 1}^{\infty} K_m \neq \emptyset$.

Beweis: Es sei $\underline{x}_n \in K_n$ beliebig gewählt. Da $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in der kompakten Menge K_1 ist, besitzt sie nach Satz 95 eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$. Da $n_j \geq j\ \forall j \geq 1$ ist dabei $\underline{x}_{n_j} \in K_j\ \forall j \geq 1$. Es sei $\underline{a} := \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j}$. Für jedes $m \geq 1$ ist $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq m}$ eine konvergente Folge in K_m.

Da K_m eine abgeschlossene Menge ist, ist $\underline{a} \in K_m \ \forall m \geq 1$ (nach Satz 94). Daher ist $\underline{a} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$.

<u>Bemerkung</u>: Korollar 97 enthält als Spezialfall das Intervallschachtelungsprinzip: Ist $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$ eine absteigende Folge kompakter Intervalle (in $\mathbb{R}$), so ist $\bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \neq \emptyset$