2. Teil: Reelle Analysis in mehreren Veränderlichen

Im 2. Teil betrachten wir den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^k$ mit Standardskalarprodukt und davon induzierten Norm, allerdings mit leicht veränderten Notation:

- $\mathbb{R}^k = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \}$ wobei $k \in \mathbb{N}^+$ ist. Wir werden meistens nicht genau zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterscheiden. Im Zweifelsfall sind Vektoren Spaltenvektoren (außer es wird anders festgelegt)
- Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k), \underline{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$
- Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k)$
- Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k), \underline{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$
- Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ ist $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}$
- Die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$ bezeichnen wir mit $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$, d.h.

  $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_k = (0, \dots, 0, 1)$

  Die Elemente der Standardbasis sind normiert (d.h. $\|\underline{e}_i\| = 1$ für $1 \leq i \leq k$) und orthogonal (d.h. $\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = 0$ für $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$). Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ gilt die (eindeutige) Darstellung $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_k \underline{e}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i \underline{e}_i$

2.1 Folgen im $\mathbb{R}^k$

Definition: Eine Abbildung $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^k$ (oder $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$) heißt Folge im $\mathbb{R}^k$. Wir schreiben dafür $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ (bzw. $(\underline{x}_n)_{n \geq 0}$). Sollen die einzelnen Komponenten von $\underline{x}_n$ beschrieben werden, schreiben wir dafür $\underline{x}_n = (x_{n1}, \dots, x_{nk})$.

Definition: Man sagt, eine Folge $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ im $\mathbb{R}^k$ konvergiert gegen $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ wenn $\lim_{n \to \infty} \|\underline{x}_n - \underline{a}\| = 0$.
Man schreibt dafür $\underline{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \underline{a}$ oder $\lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{a}$.

Bemerkungen: 1) Diese Definition führt die Konvergenz einer Folge im Mehrdimensionalen auf die Konvergenz im Eindimensionalen zurück, die wir als bekannt voraussetzen.
2) Man hätte auch definieren können: Die Folge $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen $\underline{a}$ wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^+ \ \forall n \geq N : \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \varepsilon$.

Satz 87 Es sei $(\underline{x}_n)_{n \geq 1} = (x_{n1}, \dots, x_{nk})_{n \geq 1}$ eine Folge im $\mathbb{R}^k$ und $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$.
Äquivalent sind:

(i) $\lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{a}$,

(ii) $\lim_{n \to \infty} x_{ni} = a_i$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \geq 1$, sodass $\|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \varepsilon \ \forall n \geq N$ und daher $0 \leq |x_{ni} - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_{nj} - a_j|^2} = \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \varepsilon$ für $1 \leq i \leq k$ und $n \geq N$, d.h. $x_{ni} \xrightarrow[n \to \infty]{} a_i$ für $1 \leq i \leq k$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\varepsilon>0$. Dann $\exists N_1,\dots,N_k\geq 1$, sodass $|x_{ni}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ für $n\geq N_i$. Für $n\geq \max\{N_1,\dots,N_k\}$ gilt dann

$$0\leq \|\underline{x}_n-\underline{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k}|x_{nj}-a_j|^2} < \sqrt{k\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon, \text{ d.h. } \underline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{a}.$$

<u>Satz 88</u> (CAUCHY-Kriterium) Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq1}$ eine Folge im $\mathbb{R}^k$. Äquivalent sind:

(i) $(\underline{x}_n)_{n\geq1}$ konvergiert,

(ii) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\geq1\ \forall n,m\geq N: \|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|<\varepsilon$.

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\underline{a}:=\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n$ und $\varepsilon>0$. Dann $\exists N\geq1\ \forall n\geq N: \|\underline{x}_n-\underline{a}\|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|\leq\|\underline{x}_n-\underline{a}\|+\|\underline{a}-\underline{x}_m\| = \|\underline{x}_n-\underline{a}\|+\|\underline{x}_m-\underline{a}\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad\forall n,m\geq N.$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $1\leq i\leq k$ und $\varepsilon>0$. Dann $\exists N\geq1\ \forall n,m\geq N: \|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|<\varepsilon$. Daraus folgt $|x_{ni}-x_{mi}|\leq\|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|<\varepsilon\ \forall n,m\geq N$, d.h. $(x_{ni})_{n\geq1}$ ist eine (eindimensionale) Cauchyfolge. Daher konvergiert $(x_{ni})_{n\geq1}$. Da $i\in\{1,\dots,k\}$ beliebig war, folgt aus Satz 87, dass $(\underline{x}_n)_{n\geq1}$ konvergiert.

<u>Satz 89</u> Es seien $(\underline{x}_n)_{n\geq1}$ und $(\underline{y}_n)_{n\geq1}$ zwei konvergente Folgen im $\mathbb{R}^k$, $\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n=\underline{a}$ und $\lim_{n\to\infty}\underline{y}_n=\underline{b}$.

(i) $\lim_{n\to\infty}(\underline{x}_n+\underline{y}_n)=\underline{a}+\underline{b}$ (d.h. $\lim_{n\to\infty}(\underline{x}_n+\underline{y}_n)=\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n+\lim_{n\to\infty}\underline{y}_n$),

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\lambda\underline{x}_n)=\lambda\underline{a}$ (d.h. $\lim_{n\to\infty}(\lambda\underline{x}_n)=\lambda\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n$),

(iii) $\lim_{n\to\infty}\langle\underline{x}_n,\underline{y}_n\rangle=\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$ (d.h. $\lim_{n\to\infty}\langle\underline{x}_n,\underline{y}_n\rangle=\langle\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n,\lim_{n\to\infty}\underline{y}_n\rangle$),

(iv) $\lim_{n\to\infty}\|\underline{x}_n\|=\|\underline{a}\|$ (d.h. $\lim_{n\to\infty}\|\underline{x}_n\|=\|\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n\|$).

<u>Beweis:</u> Aus $\underline{x}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\underline{a}$ und $\underline{y}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\underline{b}$ folgt wegen Satz 87, dass $x_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}a_i$ und $y_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}b_i$ für $1\leq i\leq k$. Auf diese komponentenweisen Aussagen wenden wir nun die entsprechenden Resultate der eindimensionalen Analysis an.

(i) Für $1\leq i\leq k$ folgt $x_{ni}+y_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}a_i+b_i$ und (wegen Satz 87) $\underline{x}_n+\underline{y}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\underline{a}+\underline{b}$.

(ii) Für $1\leq i\leq k$ folgt $\lambda x_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda a_i$ und (wegen Satz 87) $\lambda\underline{x}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\lambda\underline{a}$

(iii) Für $1\leq i\leq k$ folgt $x_{ni}y_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}a_ib_i$ und daraus

$$\langle\underline{x}_n,\underline{y}_n\rangle=\sum_{i=1}^{k}x_{ni}y_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{i=1}^{k}a_ib_i=\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$$

(iv) Aus (iii) folgt $\langle\underline{x}_n,\underline{x}_n\rangle\xrightarrow[n\to\infty]{}\langle\underline{a},\underline{a}\rangle$ und daher wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$\lim_{n\to\infty}\|\underline{x}_n\|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\langle\underline{x}_n,\underline{x}_n\rangle}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\langle\underline{x}_n,\underline{x}_n\rangle}=\sqrt{\langle\underline{a},\underline{a}\rangle}=\|\underline{a}\|$$

26.11.2024

Definition: Eine Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ im $\mathbb{R}^k$ heißt beschränkt, wenn es ein $R>0$ gibt, derart dass $\|\underline{x}_n\| \leq R \ \forall n\geq 1$.

Satz 90 (mehrdimensionaler Satz von BOLZANO - WEIERSTRASS) Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^k$

Falls $k=1$, ist die Behauptung der eindimensionale Satz von Bolzano - Weierstraß, den wir als bekannt voraussetzen.

Es sei nun $k>1$, $1<l\leq k$ und es sei bereits bewiesen, dass die $(l-1)$-dimensionale, (ebenfalls) beschränkte Folge $(x_{n1},\dots,x_{n,l-1})_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_\alpha 1},\dots,x_{n_\alpha,l-1})_{\alpha\geq 1}$ besitzt.

Wir betrachten die eindimensionale beschränkte Folge $(x_{n_\alpha l})_{\alpha\geq 1}$. Nach dem eindimensionalen Satz von Bolzano - Weierstraß besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{\alpha_\beta},l})_{\beta\geq 1}$. Dann ist $(x_{n_{\alpha_\beta},1},\dots,x_{n_{\alpha_\beta},l-1},x_{n_{\alpha_\beta},l})_{\beta\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_{n1},\dots,x_{n,l-1},x_{nl})_{n\geq 1}$. Verfahre weiter so bis $l=k$ erreicht ist, d.h. eine konvergente Teilfolge von $(\underline{x}_n)_{n\geq 1} = (x_{n1},\dots,x_{nk})_{n\geq 1}$ gefunden wurde.