1.9 Reelle Vektorräume mit inneren Produkt

Definition: Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt inneres Produkt auf V (oder Skalarprodukt auf V), wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V$
2) $\langle \alpha v,w \rangle = \alpha \langle v,w \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v,w \in V$

} linear (im ersten Argument)

3) $\langle v,w \rangle = \langle w,v \rangle \quad \forall v,w \in V$ symmetrisch
4) $\langle v,v \rangle > 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\}$ positiv definit

Lemma 78 Es sei V ein reeller Vektorraum und $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.

(i) $\langle u,v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V$
(ii) $\langle v,\alpha w \rangle = \alpha \langle v,w \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v,w \in V$

} linear (im zweiten Argument)

(iii) $\langle 0,v \rangle = \langle v,0 \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

Beweis: (i) $\langle u,v+w \rangle \overset{3)}{=} \langle v+w,u \rangle \overset{1)}{=} \langle v,u \rangle + \langle w,u \rangle \overset{3)}{=} \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \quad \forall u,v,w \in V$

(ii) $\langle v,\alpha w \rangle \overset{3)}{=} \langle \alpha w,v \rangle \overset{2)}{=} \alpha \langle w,v \rangle \overset{3)}{=} \alpha \langle v,w \rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v,w \in V$

(iii) $\langle 0,v \rangle = \langle 0 \cdot 0,v \rangle \overset{2)}{=} 0 \cdot \langle 0,v \rangle = 0 \quad \forall v \in V, \quad \langle v,0 \rangle \overset{3)}{=} \langle 0,v \rangle = 0 \quad \forall v \in V$

Beispiele: 1) Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sei $\langle x,y \rangle := x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i$

Dann ist $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i) z_i = \sum_{i=1}^n x_iz_i + \sum_{i=1}^n y_iz_i$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\left\langle \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_iy_i = \alpha \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i = \sum_{i=1}^n y_ix_i = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so $\exists j \in \{1,\dots,n\} : x_j \neq 0$ und daher $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq x_j^2 > 0$

Definition: Das in Bsp. 1) beschriebene Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ wird Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ genannt.

Beispiele (Fortsetzung): 2) Es sei $V=\mathbb{R}^2$ und $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Da $\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle = (x_1\ x_2)\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, kann man (mit $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}4 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}$)

kurz $\langle x,y\rangle = x^T\cdot A\cdot y$ schreiben. Für $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ und $\alpha\in\mathbb{R}$ ist dann

$\langle x+y,z\rangle = (x+y)^T\cdot A\cdot z = (x^T+y^T)\cdot A\cdot z = x^T\cdot A\cdot z + y^T\cdot A\cdot z = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$,

$\langle \alpha x,y\rangle = (\alpha x)^T\cdot A\cdot y = (\alpha x^T)\cdot A\cdot y = \alpha(x^T\cdot A\cdot y) = \alpha\langle x,y\rangle$

und $\langle x,y\rangle = x^T\cdot A\cdot y = (x^T\cdot A\cdot y)^T = y^T\cdot A^T\cdot x = y^T\cdot A\cdot x = \langle y,x\rangle$,

da A symmetrisch ist (d.h. $A^T=A$). Schließlich ist

$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (2x_1-x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0$ und

$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \Rightarrow (2x_1-x_2)^2 + 2x_2^2 = 0 \Rightarrow 2x_1 - x_2 = x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

3) Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ und $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V, so kann auf V durch $(v,w) := \langle [v]_B, [w]_B\rangle$ ein Skalarprodukt definiert werden. Dabei bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $[v]_B$ hat die selbe Bedeutung wie in Satz 60. D.h. sind $v=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w=\sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ für $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$, so ist $[v]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}, [w]_B = \begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$ und $(v,w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i$.

4) Auf $V=\mathbb{R}^{m\times n}$ wird durch $\langle A,B\rangle = \mathrm{Spur}(A^T\cdot B)$ (für $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$) ein Skalarprodukt definiert. (Die Spur einer quadratischen Matrix wurde in den Übungen vor Bsp 26) definiert.)

5) Es seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ und $V=C([a,b])$. Dann ist durch $\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ ein Skalarprodukt auf V definiert:

$\langle f+g,h\rangle = \int_a^b (f+g)(x)\cdot h(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x))\cdot h(x)\,dx = \int_a^b (f(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h(x))\,dx$

$= \int_a^b f(x)\cdot h(x)\,dx + \int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle \quad \forall f,g,h\in C([a,b])$

$\langle \alpha f,g\rangle = \int_a^b (\alpha f)(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \alpha\langle f,g\rangle \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \forall f,g\in C([a,b])$

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \quad \forall f,g\in C([a,b])$

Um zu zeigen, dass Bedingung 4) erfüllt ist, holen wir etwas weiter aus:

Ist $f\in C([a,b])$, $f\geq 0$ und $\exists x_0\in[a,b]: f(x_0)>0$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

Da f stetig ist, gibt es zu $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ ein $\delta>0$, derart dass die Bedingung

$|x-x_0|<\delta, x\in[a,b] \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}$ erfüllt ist. Für $x\in[a,b]$ mit $|x-x_0|<\delta$

folgt $\frac{f(x_0)}{2}>|f(x)-f(x_0)|\geq f(x_0)-f(x)$ und daher $f(x)>\frac{f(x_0)}{2}>0$.

Setzt man $I:=[a,b]\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$, so ist I ein Intervall positiver Länge $|I|$ und

$\int_a^b f(x)dx \geq |I|\cdot\frac{f(x_0)}{2}>0$.

Ist nun $f\in C([a,b])$ und $f\neq 0$, so $\exists x_0\in[a,b]: f(x_0)\neq 0$. Da $f^2\geq 0$ und $(f(x_0))^2>0$

folgt aus dem eben Bewiesenen $\langle f,f\rangle=\int_a^b (f(x))^2\,dx>0$

Definition: Ein reeller Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle .,.\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ wird euklidischer Vektorraum genannt.

20.11.2024

Satz 79 (CAUCHY-SCHWARZ-sche Ungleichung) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle .,.\rangle$. Dann ist $|\langle v,w\rangle|^2\leq\langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle\ \forall v,w\in V$.

Dabei gilt Gleichheit genau dann wenn $v=w$ oder v,w l.a. sind.

Beweis: Ist $w=0$, so ist $\langle v,w\rangle=\langle w,w\rangle=0$ wegen Lemma 78 (iii) und daher

$|\langle v,w\rangle|=0=\langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle$.

Es sei nun $w\neq 0$ und daher $\langle w,w\rangle>0$. Für $\alpha\in\mathbb{R}$ beliebig ist

$$0\leq\langle v-\alpha w,v-\alpha w\rangle=\langle v,v\rangle-\alpha\langle w,v\rangle-\alpha\langle v,w\rangle+\alpha^2\langle w,w\rangle$$
$$=\langle v,v\rangle-2\alpha\langle v,w\rangle+\alpha^2\langle w,w\rangle$$

Für $\alpha=\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ erhält man daraus

$$0\leq\langle v,v\rangle-2\frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle w,w\rangle}+\frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle w,w\rangle}=\langle v,v\rangle-\frac{\langle v,w\rangle^2}{\langle w,w\rangle}$$ und daher

$0\leq\langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2$ und $|\langle v,w\rangle|^2=\langle v,w\rangle^2\leq\langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle$.

Ist $|\langle v,w\rangle|^2=\langle v,w\rangle^2=\langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle$, so muss entweder $w=0$ oder

$0=v-\alpha w=v-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w$ gelten. In beiden Fällen sind v,w identisch oder l.a.

Sind v,w identisch, oder l.a., so ist $w=0$ oder $\exists\alpha\in\mathbb{R}: v=\alpha w$ (wegen Lemma 26)

und daher $\langle v,w\rangle^2=\alpha^2\langle w,w\rangle^2=(\alpha^2\langle w,w\rangle)\cdot\langle w,w\rangle=\langle v,v\rangle\cdot\langle w,w\rangle$.

Beispiele: 1) Für das Standardskalarprodukt $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ auf $\mathbb{R}^n$ erhält man $(x_1y_1+\dots+x_ny_n)^2\leq(x_1^2+\dots+x_n^2)\cdot(y_1^2+\dots+y_n^2)$.

2) Insbesondere erhält man für $n=2$ bzw. $n=3$ die Ungleichungen

$(x_1y_1+x_2y_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)$ und $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2\leq(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$.

3) Für das in Bsp. 5) oben beschriebene Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ auf $C([a,b])$ erhält man $$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right).$$

Definition: Es sei V ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ eine Abbildung, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $\|v\| \geq 0 \ \forall v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \sigma$,

2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$,

3) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\| \quad \forall v,w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Dann wird $\|v\|$ als Norm von $v \in V$ und V als normierter Vektorraum bezeichnet.

Satz 80 Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle} \ \forall v \in V$ eine Norm auf V definiert.

Beweis: Für $v = \sigma$ ist $\|v\| = \|\sigma\| = \sqrt{\langle\sigma,\sigma\rangle} \overset{\text{Lemma 78 (iii)}}{=} 0$.

Für $v \neq \sigma$ ist $\langle v,v\rangle > 0$ und daher $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} > 0$.

$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v,v\rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle v,v\rangle} = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$

$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$

Aus Satz 79 folgt $\langle v,w\rangle \le |\langle v,w\rangle| \le \sqrt{\langle v,v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w,w\rangle} = \|v\| \cdot \|w\|$ und daher $\|v+w\|^2 \le \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$ und schließlich $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Bemerkungen: 1) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \ \forall v \in V$ die in Satz 80 beschriebene Norm, so sagt man, die Norm $\|\cdot\|$ werde durch das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induziert.

2) Es gibt normierte Vektorräume, deren Norm nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird. z. B. ist auf $\mathbb{R}^n$ durch $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$ eine Norm gegeben, die nicht durch ein inneres Produkt induziert wird.

Korollar 81 (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, 2. Formulierung) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm. Dann ist $|\langle v,w\rangle| \le \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v,w \in V$.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 79 und Satz 80.

Lemma 82 Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Dann ist $\big|\|v\| - \|w\|\big| \le \|v-w\|$ für alle $v,w \in V$.

Beweis: $\|v\| = \|(v-w)+w\| \le \|v-w\| + \|w\|$ und daher $\|v\| - \|w\| \le \|v-w\|$. Aus Symmetriegründen ist $\|w\| - \|v\| \le \|w-v\| = \|(-1)\cdot(v-w)\| = |-1| \cdot \|v-w\| = \|v-w\|$. Insgesamt ist $\big|\|v\| - \|w\|\big| = \max\{\|v\|-\|w\|, \|w\|-\|v\|\} \le \|v-w\|$.

Satz 83 (Cosinussatz für euklidische Vektorräume) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm. Dann ist

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle \quad \forall v,w \in V.$$

Beweis: $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle$.

Definition: Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Zwei Vektoren $v,w\in V$ heißen orthogonal wenn $\langle v,w\rangle = 0$.

Korollar 84 (Satz des PYTAGORAS für euklidische Vektorräume) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot,\cdot\rangle$, sowie $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm und $v,w\in V$ orthogonal. Dann ist $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Beweis: $\|v-w\|^2 \overset{\text{Satz 83}}{=} \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Bemerkungen: 1) Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt $-\|v\|\cdot\|w\| \le \langle v,w\rangle \le \|v\|\cdot\|w\|$ $\forall v,w\in V$. Sind $v,w\neq 0$, so erhält man daraus

$$-1 \le \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \le 1$$

und es gibt einen eindeutig bestimmten Winkel $\varphi \in [0,\pi]$ mit der Eigenschaft $\cos\varphi = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$.

2) Setzt man $\cos(v,w) := \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$ für $v,w\in V\setminus\{0\}$, so kann man auf jedem euklidischen Vektorraum den Winkel zwischen zwei Vektoren $\neq 0$ definieren. Ist $V=\mathbb{R}^2$ oder $V=\mathbb{R}^3$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt, so ist $\cos(v,w)$ tatsächlich der Cosinus des von den Vektoren v und w eingeschlossenen Winkels.

3) Für $v,w\in V\setminus\{0\}$ kann man das innere Produkt umschreiben zu $\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos(v,w)$. Etwas schlampig lässt man diese Gleichung auch für $v=0$ (oder $w=0$) gelten, da dann $\|v\| = \langle v,w\rangle = 0$ (oder $\|w\| = \langle v,w\rangle = 0$) ist – auch wenn dann $\cos(v,w)$ nicht vernünftig definiert ist. Der Cosinussatz (Satz 83) wird dann zu $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\cdot\|w\|\cos(v,w)$. Für $V=\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt erhält man den klassischen Cosinussatz.

4) $v,w\in V\setminus\{0\}$ sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v,w\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(v,w) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ (wobei $\varphi\in[0,\pi]$ durch $\cos\varphi = \cos(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$ festgelegt ist). Ist $V=\mathbb{R}^2$ oder $V=\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, so entspricht dieser Orthogonalitätsbegriff genau unseren üblichen geometrischen Vorstellungen. Ebenso erhält man für $V=\mathbb{R}^2$ und dem Standardskalarprodukt den klassischen Satz des Pythagoras.

Definition: Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Ein Vektor $v\in V$ heißt normiert (oder Einheitsvektor) wenn $\|v\| = 1$.

Lemma 85 Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so ist $\frac{1}{\|v\|} v$ normiert.

25.11.2024

Beweis: $\left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \cdot \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$

Korollar 86 Es sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$.

(i) $\forall v, w \in V: \|v - w\| \geq 0$ und $\|v - w\| = 0 \iff v = w$,

(ii) $\forall v, w \in V: \|v - w\| = \|w - v\|$,

(iii) $\forall u, v, w \in V: \|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis: Folgt aus der Definition der Norm. Es ist

$\|v - w\| = 0 \iff v - w = 0 \iff v = w$,

$\|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\|$ und

$\|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$.