1.8 Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem (über einem Körper K), d.h.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

mit $a_{ij} \in K$ (für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) und $b_1, \dots, b_m \in K$. Gesucht sind alle $x_1, \dots, x_n \in K$, die alle m Gleichungen erfüllen. Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n,$$

so kann man das Gleichungssystem kurz $A \cdot x = b$ schreiben. Die Matrix A wird dabei Koeffizientenmatrix genannt.

<u>Satz 73</u> Es sei $A \in K^{m\times n}$.

(i) Die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $A\cdot x = 0$ bilden einen Teilraum W von K^n mit $\dim_K W = n - \operatorname{Rang} A$,

(ii) Das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ besitzt genau dann nur die triviale Lösung $x = 0$ wenn $\operatorname{Rang} A = n$,

(iii) Ist $\operatorname{Rang} A < n$, so besitzt das Gleichungssystem $A\cdot x = 0$ stets $k = n - \operatorname{Rang} A$ l.u. Lösungen $v_1, \dots, v_k \in K^n$, derart dass $W = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K\}$.

<u>Beweis:</u> (i) Die Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$, $\varphi(x) = A \cdot x$ ist linear nach Satz 59(i) und $A\cdot x = 0 \iff \varphi(x) = 0 \iff x \in \operatorname{Kern}\varphi$. Setzt man $W := \operatorname{Kern}\varphi$, so ist W nach Korollar 66 ein Teilraum von K^n und

$$\dim_K W = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi \overset{\text{Satz 69}}{=} \dim_K K^n - \operatorname{Rang}\varphi \overset{\text{Lemma 67}}{=} n - \operatorname{Rang} A.$$

(ii) $A \cdot x = 0$ besitzt nur die Lösung $x = 0 \iff W = \{0\} \iff \dim_K W = 0 \overset{(i)}{\iff} \operatorname{Rang} A = n$

(iii) Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von W, so ist $k = n - \operatorname{Rang} A$ und $W = \{\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K\}$.

<u>Notation:</u> Wir fassen die Koeffizientenmatrix A und den Vektor b zur erweiterten Koeffizientenmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times(n+1)}$$

zusammen.

Satz 74 (i) Das lineare Gleichungssystem $A\cdot x=b$ ist genau dann lösbar, wenn $\text{Rang}\,A=\text{Rang}\,A'$,

(ii) Sind $x_1, x_2 \in K^n$ Lösungen des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x=b$, so ist x_1-x_2 Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x=o$,

(iii) Ist $x_0\in K^n$ Lösung des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x=b$ und $v\in K^n$ Lösung des (homogenen) Gleichungssystems $A\cdot x=o$, so ist x_0+v Lösung des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x=b$,

(iv) Ist $W=\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i \,\middle|\, \alpha_1,\dots,\alpha_k\in K\right\}\subseteq K^n$ der Teilraum der Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x=o$ (mit $k=n-\text{Rang}\,A$ und $\{v_1,\dots,v_k\}$ eine Basis von W) und $x_0\in K^n$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x=b$, so ist die Menge aller Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x=b$ gegeben durch

$$x_0+W=\left\{x_0+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i \,\middle|\, \alpha_1,\dots,\alpha_k\in K\right\}\ (\subseteq K^n),$$

(v) Ist das (inhomogene) Gleichungssystem $A\cdot x=b$ lösbar, so ist es genau dann eindeutig lösbar, wenn $\text{Rang}\,A=n$.

Beweis: (i) Es sei wieder $\varphi: K^n\to K^m$, $\varphi(x)=A\cdot x$ und $A^1,\dots,A^n$ seien die Spaltenvektoren von A. Dann gilt

$A\cdot x=b$ ist lösbar $\iff b\in \text{Bild}\,\varphi=[A^1,\dots,A^n] \iff [A^1,\dots,A^n,b]=[A^1,\dots,A^n]$

$\overset{\text{Kor. 31 (ii)}}{\iff} \dim_K[A^1,\dots,A^n,b]=\dim_K[A^1,\dots,A^n] \iff \text{Rang}\,A'=\text{Rang}\,A.$

(ii) Aus $A\cdot x_1=A\cdot x_2=b$ folgt $A\cdot(x_1-x_2)=A\cdot x_1-A\cdot x_2=b-b=o$

(iii) Aus $A\cdot x_0=b$ und $A\cdot v=o$ folgt $A\cdot(x_0+v)=A\cdot x_0+A\cdot v=b+o=b$

(iv) Es sei $L:=\{x\in K^n \mid A\cdot x=b\}$ die Menge aller Lösungen des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x=b$. Laut Voraussetzung ist $x_0\in L$.

Ist $x_1\in L$, so ist $x_1-x_0\in W$ (nach (ii)) und daher $x_1\in x_0+W$, d.h. $L\subseteq x_0+W$.

Ist $x_1\in x_0+W$, so ist $x_1\in L$ (nach (iii)), d.h. $x_0+W\subseteq L$. Also ist $L=x_0+W$.

(v) $A\cdot x=b$ ist eindeutig lösbar $\overset{(iv)}{\iff} W=\{o\} \iff \dim_K W=0 \overset{\text{Satz 73}}{\iff} n-\text{Rang}\,A=0$

$\iff \text{Rang}\,A=n$.

Bemerkungen: 1) Man kann sich Satz 74 (iv) folgendermaßen merken:

Allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems	=	Spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems	+	Allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystem

2) Aus Satz 74 folgt sofort: Ist $K=\mathbb{R}$ (oder $K=\mathbb{C}$), so hat das lineare Gleichungssystem $A\cdot x=b$ keine, eine oder (überabzählbar) unendlich viele Lösungen.

3) $\dim_K W$ entspricht der Anzahl der Parameter, die man benötigt, um die allgemeine Lösung auszuschreiben.

<u>Korollar 75</u> Es sei $A \in K^{n\times n}$ und $b \in K^n$. Dann sind äquivalent:

(i) Das lineare Gleichungssystem $A\cdot x = b$ ist eindeutig lösbar,

(ii) A ist invertierbar

Gelten eine (und damit beide) dieser Bedingungen, so ist $x_0 = A^{-1}b$ die (eindeutige) Lösung des Gleichungssystems $A\cdot x = b$.

<u>Beweis</u>: (i) $\Longrightarrow$ (ii) $A\cdot x = b$ ist eindeutig lösbar $\xrightarrow{\text{Satz 74 (v)}}$ $\operatorname{Rang} A = n$ $\xrightarrow{\text{Satz 38 (iv)}}$ A ist invertierbar

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $x = A^{-1}b$ ist Lösung, da $A\cdot(A^{-1}b) = (A\cdot A^{-1})\cdot b = I_n \cdot b = b$, also ist das Gleichungssystem $A\cdot x = b$ lösbar und

A invertierbar $\xrightarrow{\text{Satz 38 (iv)}}$ $\operatorname{Rang} A = n$ $\xrightarrow{\text{Satz 74 (v)}}$ $A\cdot x = b$ ist eindeutig lösbar

<u>Satz 76</u> (CRAMERsche Regel) Es sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar mit Spaltenvektoren $A^1,\dots,A^n$ und $b \in K^n$. Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die (eindeutige) Lösung des Gleichungssystems $A\cdot x = b$, so ist $x_i = (\det A)^{-1}\cdot \det(A^1,\dots,A^{i-1}, b, A^{i+1},\dots,A)$ für $1 \le i \le n$.

<u>Beweis</u>: Das Gleichungssystem $A\cdot x = b$ kann auch als $x_1A^1 + \dots + x_nA^n = b$ angeschrieben werden. Daraus erhält man (für $1 \le i \le n$)

$$\det(A^1,\dots,A^{i-1}, b, A^{i+1},\dots,A^n) = \det\Big(A^1,\dots,A^{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_jA^j, A^{i+1},\dots,A^n\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j\cdot \det(A^1,\dots,A^{i-1}, A^j, A^{i+1},\dots,A^n) = x_i\cdot \det(A^1,\dots,A^{i-1}, A^i, A^{i+1},\dots,A^n)$$

$$= x_i\cdot \det A$$

Da $\det A \neq 0$ (nach Korollar 51) folgt die Behauptung.

<u>Beispiel</u>: Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -5 \ (\neq 0)$$

$$x = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$$

$$y = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$$

19.11.2024

Korollar 77 Für $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar,

(ii) $\operatorname{Rang} A = n$,

(iii) Die Zeilen von A sind l.u.,

(iv) Die Spalten von A sind l.u.,

(v) $\det A \neq 0$,

(vi) Das lineare Gleichungssystem $A\cdot x = b$ ist eindeutig lösbar (wobei $b \in K^n$ beliebig ist),

(vii) Die lineare Abbildung $\varphi: K^n \to K^n$, $\varphi(x) = A\cdot x$ ist ein Isomorphismus

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Wurde in Satz 38 (iv) bewiesen.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Folgt aus Korollar 32 und Satz 36

(i) $\Leftrightarrow$ (v) Wurde in Korollar 51 bewiesen

(i) $\Leftrightarrow$ (vi) Wurde in Korollar 75 bewiesen

(i) $\Rightarrow$ (vii) $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow A\cdot x = A\cdot y \Rightarrow x = A^{-1}Ax = A^{-1}Ay = y$, d.h. φ ist injektiv

und $\varphi(A^{-1}x) = AA^{-1}x = x \quad \forall x \in K^n$, d.h. φ ist surjektiv

(vii) $\Rightarrow$ (ii) $n = \dim_K K^n \overset{\text{Kor. 70 (iii)}}{=} \operatorname{Rang}\varphi \overset{\text{Lemma 67}}{=} \operatorname{Rang} A$.