1.7 Lineare Abbildungen

<u>Definition</u>: Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt (K-)linear, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1) $\forall v, w \in V: \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$,

2) $\forall \alpha \in K\ \forall v \in V: \varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$.

<u>Lemma 58</u>: Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung

(i) $\varphi(\sigma) = \sigma$ (genauer: $\varphi(\sigma_V) = \sigma_W$),

(ii) $\varphi(-v) = -\varphi(v)\quad \forall v \in V$.

<u>Beweis</u>: (i) $\varphi(\sigma) \overset{\text{Lemma 20 (i)}}{=} \varphi(0 \cdot \sigma) \overset{2)}{=} 0 \cdot \varphi(\sigma) \overset{\text{Lemma 20 (i)}}{=} \sigma$

(ii) $\varphi(-v) \overset{\text{Lemma 20 (iv)}}{=} \varphi((-1)v) = (-1)\varphi(v) \overset{\text{Lemma 20 (iv)}}{=} -\varphi(v)$

<u>Satz 59</u> Es sei K ein Körper.

(i) Ist $A \in K^{m\times n}$, so ist $\varphi: K^n \to K^m$, $\varphi(v) = A\cdot v$ eine lineare Abbildung.

(ii) Ist $\varphi: K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung, so $\exists A \in K^{m\times n}: \varphi(v) = A\cdot v\quad \forall v \in K^n$.

<u>Beweis</u>: (i) $\varphi(v+w) = A\cdot(v+w) \overset{\text{Satz 13 (i)}}{=} A\cdot v + A\cdot w = \varphi(v) + \varphi(w)\quad \forall v, w \in K^n$

$\varphi(\alpha\cdot v) = A\cdot(\alpha v) \overset{\text{Übungsbsp. 30)}}{=} \alpha\cdot(A\cdot v) = \alpha\cdot\varphi(v)\quad \forall \alpha \in K\ \forall v \in K^n$.

(ii) Für $1 \le i \le n$ bezeichne $e_i \in K^n$ den i-ten Einheitsvektor und $A^i = \varphi(e_i) \in K^m$. Es sei $A \in K^{m\times n}$ die Matrix mit Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$. Ist $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, so ist

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i A^i = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\cdot v.$$

<u>Satz 60</u> Es sei $V (\neq \{\sigma\})$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\dim_K V = n$ und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Besitzt $v \in V$ die eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ (mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$), so ist die Abbildung $V \to K^n$, $v \mapsto [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ linear. (D.h. jedem Vektor $v \in V$ wird der Vektor $[v]_B$ seiner Koordinaten bezüglich der Basis B zugeordnet.)

<u>Beweis</u>: Für $v, w \in V$ gelte $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ (mit eindeutig bestimmten $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$). Dann ist $v + w = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i$ die eindeutige Darstellung von $v+w$ als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ und daher

$$[v+w]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [v]_B + [w]_B.$$

Für $\alpha \in K$ ist $\alpha v = \sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i) v_i$ die eindeutige Darstellung von αv als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ und daher

$$[\alpha v]_B = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha [v]_B.$$

Bemerkung: Die Abbildung $v \mapsto [v]_B$ hängt nicht nur von B, sondern auch von der Reihenfolge der Basisvektoren $v_1, \dots, v_n$ ab. Man müsste genauer zwischen einer „Basis" und einer „geordneten Basis" unterscheiden. Wir sind hier etwas schlampig.

Ist etwa $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und

$B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, so ist $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v$, $B_2 = \{e_2, e_1, e_3\}$, so ist $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, so ist $[v]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, so ist $[v]_{B_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$,

da $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Wegen $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ ist B_4 l.u. und daher Basis.)

Beispiele: 1) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung und jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat diese Gestalt (nach Satz 59).

2) Für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ist $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = (a_1 \cdots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung und jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat diese Gestalt (nach Satz 59).

3) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-x + \frac{2y}{3}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (siehe Seite 19). Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} y \\ -x + \frac{2}{3} y \end{pmatrix}$ ist linear. Das folgt sowohl aus Satz 59 (da $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$) als auch aus Satz 60 (da $\varphi(v) = [v]_B$).

11.11.2024

4) $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ ist Basis von P_2 (Bsp. 5) auf Seite 20). Die Abbildung $\varphi: P_2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(p) = [p]_B$ (d.h. $\varphi(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$) ist linear nach Satz 60.

5) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ (Bsp. 4) auf Seite 21). Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^{2 \times 2} \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(A) = [A]_B$ (d.h. $\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$) ist linear nach Satz 60.

6) Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Die Nullabbildung $\varphi: V \to W$, $\varphi(v) = 0$ $\forall v \in V$ ist linear (da $\varphi(v + w) = 0 = 0 + 0 = \varphi(v) + \varphi(w)$ $\forall v, w \in V$ und $\varphi(\alpha v) = 0 = \alpha 0 = \alpha \varphi(v)$ für $\alpha \in K$ und $v \in V$).

7) Ist V ein K-Vektorraum, so ist die identische Abbildung $id_V: V \to V$, $id_V(v) = v$ $\forall v \in V$ ist linear (da $id_V(v + w) = v + w = id_V(v) + id_V(w)$ $\forall v, w \in V$ und $id_V(\alpha v) = \alpha v = \alpha\, id_V(v)$ für $\alpha \in K$ und $v \in V$).

8) Die Abbildung $\mathcal{F}_K \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \geq 1} \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ ist linear (da laut eindimensionaler Analysis $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n + \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ und $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ für $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_K$ und $\alpha \in \mathbb{R}$).

9) Die Abbildung $C^\infty(I) \to C^\infty(I)$, $f \mapsto f'$ ist linear (da laut eindimensionaler Analysis $(f+g)' = f' + g'$ und $(\alpha f)' = \alpha \cdot f'$ für $f, g \in C^\infty(I)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$).

10) Ebenso ist die Abbildung $P \to P$, $p \mapsto p'$ linear.

11) Die Abbildung $C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ ist linear (da laut eindimensionaler Analysis $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ und $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ für $f, g \in C([a,b])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$).

<u>Satz 61</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist B eine Basis von V, so ist φ bereits durch die Werte $\varphi(v)$ (mit $v \in B$) eindeutig bestimmt. (D.h. ist zu jedem $v \in B$ ein $w_v \in W$ gegeben, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = w_v$ $\forall v \in B$.)

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit: Angenommen, $\varphi: V \to W$ ist eine lineare Abbildung, die die geforderte Eigenschaft besitzt. Ist $v \in V$, so ist $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in B$. Ist $\varphi(v_i) = w_i$ $(\in W)$ gegeben (für $1 \le i \le n$), so ist $\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$. $(*)$

Existenz: Wir zeigen, dass die durch $(*)$ gegebene Abbildung linear ist. Die Vektoren $v, w \in V$ mögen die Darstellungen $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ besitzen (wobei $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq B$ eine hinreichend große Menge von Basisvektoren sein soll). Dann ist $v + w = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i$ und $\alpha v = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) v_i$ (für $\alpha \in K$). Ist wieder $\varphi(v_i) = w_i$ (für $1 \le i \le n$), so

$$\varphi(v+w) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^n \beta_i w_i = \varphi(v) + \varphi(w) \text{ und}$$

$$\varphi(\alpha v) = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) w_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \alpha \varphi(v).$$

<u>Definition</u>: Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ wird Isomorphismus (von K-Vektorräumen) genannt.

<u>Definition</u>: Zwei K-Vektorräume V und W werden isomorph genannt, wenn es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$ gibt. Man schreibt $V \cong W$ dafür.

<u>Lemma 62</u> Es seien U, V und W drei K-Vektorräume

(i) Sind $\varphi: V \to W$ und $\psi: W \to U$ lineare Abbildungen, so ist auch $\psi \circ \varphi: V \to U$ eine lineare Abbildung,

(ii) Sind $\varphi: V \to W$ und $\psi: W \to U$ Isomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi: V \to U$ ein Isomorphismus,

(iii) Ist $\varphi: V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varphi^{-1}: W \to V$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u>: (i) Für $v, w \in V$ ist

$$(\psi \circ \varphi)(v+w) = \psi(\varphi(v+w)) = \psi(\varphi(v) + \varphi(w)) = \psi(\varphi(v)) + \psi(\varphi(w)) = (\psi \circ \varphi)(v) + (\psi \circ \varphi)(w)$$

und für $\alpha \in K, v \in V$ ist $(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha\varphi(v)) = \alpha\psi(\varphi(v)) = \alpha(\psi\circ\varphi)(v)$

(ii) Die Abbildung $\psi\circ\varphi: V \to U$ ist linear nach (i) und bijektiv als Verknüpfung bijektiver Abbildungen.

(iii) Es seien $w_1, w_2 \in W$. Da φ bijektiv ist, gibt es eindeutig bestimmte $v_1, v_2 \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Da φ linear ist, gilt $\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1)+\varphi(v_2) = w_1+w_2$ und daher $\varphi^{-1}(w_1+w_2) = v_1+v_2 = \varphi^{-1}(w_1)+\varphi^{-1}(w_2)$.

Es sei $\alpha \in K$ und $w \in W$. Da φ bijektiv ist, gibt es ein eindeutig bestimmtes $v \in W$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = w$. Da φ linear ist, gilt $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha w$ und daher $\varphi^{-1}(\alpha w) = \alpha v = \alpha\varphi^{-1}(w)$. Damit ist gezeigt, dass $\varphi^{-1}: W \to V$ linear ist. Schließlich ist φ^{-1} bijektiv als Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung.

Satz 63 (i) Jeder K-Vektorraum V ist zu sich selbst isomorph (d.h. $V \cong V$),

(ii) Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Aus $V \cong W$ folgt $W \cong V$,

(iii) Es seien V, W und U drei K-Vektorräume. Aus $V \cong W$ und $W \cong U$ folgt $V \cong U$.

Beweis: (i) $id_V: V \to V$ ist ein Isomorphismus.

(ii) Ist $\varphi: V \to W$ ein Isomorphismus, so ist $\varphi^{-1}: W \to V$ ein Isomorphismus nach Lemma 62 (iii).

(iii) Sind $\varphi: V \to W$ und $\psi: W \to U$ Isomorphismen, so ist $\psi\circ\varphi: V \to U$ ein Isomorphismus nach Lemma 62 (ii).

Satz 64 Ist $V (\neq \{0\})$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\dim_K V = n$, so ist $V \cong K^n$. Genauer gilt: Ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist $\varphi: V \to K^n, \varphi(v) = [v]_B$ ein Isomorphismus. (Dabei hat $[v]_B$ die selbe Bedeutung wie in Satz 60)

Beweis: In Satz 60 wurde gezeigt, dass φ linear ist.

Sind $v, w \in V$ und ist $\varphi(v) = \varphi(w) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$, so ist $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = w$, d.h. φ ist injektiv.

Ist $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \in K^n$, so ist $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)$, d.h. φ ist surjektiv.

Bemerkungen: 1) Sind zwei K-Vektorräume isomorph, so haben sie die selbe Struktur (als K-Vektorräume). Durch Satz 64 wird die Struktur endlichdimensionaler K-Vektorräume vollständig beschrieben. Ist $\dim_K V = n$, so hat V (als K-Vektorraum) die selbe Struktur wie K^n. D.h. die Struktur von V ist durch $\dim_K V$ vollständig festgelegt.

2) Zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W mit $\dim_K V = \dim_K W$ können sich in anderer Hinsicht aber durchaus unterscheiden! Z.B. sind P_3 und $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zwei reelle Vektorräume und $\dim_{\mathbb{R}} P_3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$. Nach den Sätzen 63 und 64 sind die beiden Räume isomorph, da sie beide zu $\mathbb{R}^4$ isomorph sind (mittels $P_3 \to \mathbb{R}^4$, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$ und $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$).

Die übliche multiplikative Struktur der beiden Räume unterscheidet sich aber stark:

- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist (mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen) ein Ring mit 1 (Kor. 15), P_3 ist gegenüber der üblichen Multiplikation von Polynomen nicht abgeschlossen (z.B. ist $x^3 \cdot x^3 = x^6 \notin P_3$),
- Die Multiplikation von Polynomen aus P_3 ist kommutativ, die von Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht,
- In $\mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt es $A, B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (z.B. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), aber es gibt keine Polynomfunktionen $p, q \in P_3$ mit der Eigenschaft $p \cdot q = 0$.

3) Ein unendlichdimensionaler Vektorraum V kann zu einem echten Teilraum W von sich isomorph sein (d.h. $W \subsetneqq V$ und $W \cong V$).

12.11.2024

<u>Lemma 65</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung.
(i) Ist U Teilraum von V, so ist $\varphi(U) = \{\varphi(v) \mid v \in U\}$ Teilraum von W,
(ii) Ist U Teilraum von W, so ist $\varphi^{-1}(U) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ Teilraum von V.

<u>Beweis</u>: (i) Sind $w_1, w_2 \in \varphi(U)$, so $\exists v_1, v_2 \in U: \varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Dann ist $w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$. Da $v_1 + v_2 \in U$, ist $w_1 + w_2 \in \varphi(U)$.
Ist $w \in \varphi(U)$ und $\alpha \in K$, so $\exists v \in U: \varphi(v) = w$. Dann ist $\alpha w = \alpha\varphi(v) = \varphi(\alpha v)$.
Da $\alpha v \in U$, ist $\alpha w \in \varphi(U)$
(ii) Sind $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(U)$, so ist $\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in U$ und daher $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in U$, d.h. $v_1 + v_2 \in \varphi^{-1}(U)$. Ist $\alpha \in K$ und $v \in \varphi^{-1}(U)$, so ist $\varphi(v) \in U$ und daher $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) \in U$, d.h. $\alpha v \in \varphi^{-1}(U)$.

<u>Definition</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man $\operatorname{Kern}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \vec{o}\} = \varphi^{-1}(\{\vec{o}\})$ den Kern von φ und $\operatorname{Bild}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V: \varphi(v) = w\}$ das Bild von φ.

<u>Korollar 66</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung
(i) $\operatorname{Kern}\varphi$ ist Teilraum von V,
(ii) $\operatorname{Bild}\varphi$ ist Teilraum von W

<u>Beweis</u>: (i) Folgt aus Lemma 65 (ii), weil $\{\vec{o}\}$ Teilraum von W ist.
(ii) Folgt aus Lemma 65 (i), weil V Teilraum von V ist.

<u>Beispiele</u>: 1) Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ (für $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$). Fasst man die Koeffizienten des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

zur Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ zusammen, so sind die Lösungen dieses Gleichungssystems genau $\operatorname{Kern}\varphi$ für die lineare Abbildung $\varphi: K^n \to K^m$, $\varphi(x) = A \cdot x$.

2) Ist $\varphi: \mathcal{F}_k \to \mathbb{R}$, $\varphi((a_n)_{n\geq 1}) = \lim_{n\to\infty} a_n$, so ist $\operatorname{Kern}\varphi = \mathcal{F}_n$

3) Die Abbildung $\varphi: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = f + f''$ ist linear

(da $\varphi(f+g) = f+g+(f+g)'' = f+f''+g+g'' = \varphi(f)+\varphi(g)$ $\forall f,g \in C^\infty(\mathbb{R})$

und $\varphi(\alpha f) = \alpha f + (\alpha f'') = \alpha f + \alpha f'' = \alpha(f+f'') = \alpha\varphi(f)$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$ $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$)

und $\operatorname{Kern}\varphi = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f + f'' = 0\}$ ist die Menge aller Lösungen der Differentialgleichung $f'' + f = 0$ (bzw. $y'' + y = 0$). Offensichtlich sind $\sin, \cos \in \operatorname{Kern}\varphi$. In der Analysis zeigt man, dass diese beiden Funktionen sogar eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ bilden, d.h. erfüllt die Funktion $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Bedingung $f''+f=0$, so $\exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}: f(x) = \alpha\sin x + \beta\cos x$.

<u>Definition</u>: Sind V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung, so wird $\operatorname{Rang}\varphi := \dim_K \operatorname{Bild}\varphi$ der Rang von φ genannt.

<u>Lemma 67</u> Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ und $\varphi: K^n \to K^m$, $\varphi(x) = Ax$. Dann ist $\operatorname{Rang}\varphi = \operatorname{Rang} A$.

<u>Beweis</u>: Bezeichnen $A^1, \dots, A^n$ die Spaltenvektoren von A, so ist

$\operatorname{Bild}\varphi = \{\sum_{i=1}^n x_i A^i \mid x_1,\dots,x_n \in K\} = [A^1,\dots,A^n]$ und daher

$\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K \operatorname{Bild}\varphi = \dim_K [A^1,\dots,A^n] = \operatorname{Rang} A$.

<u>Satz 68</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist injektiv,

(ii) $\operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$,

(iii) $\dim_K \operatorname{Kern}\varphi = 0$,

(iv) Ist $M \subseteq V$ und M l.u., so ist $\varphi(M)$ l.u.,

(v) Ist B eine Basis von V, so $\varphi(B)$ l.u.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach Lemma 58(i) ist $\varphi(0) = 0$ und daher $\{0\} \subseteq \operatorname{Kern}\varphi$. Da φ injektiv ist, kann es kein $v \in V\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = 0$ geben und daher $\operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) Trivial

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Es seien $v_1,\dots,v_n \in M$ paarweise verschieden und $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = 0$ für $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$. Aus der Linearität von φ folgt $\varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = 0$, d.h. $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$.

D.h. $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit von M folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Folgt daraus, dass jede Basis l.u. ist.

(v) $\Rightarrow$ (i) Es seien $v, w \in V$ und $\varphi(v) = \varphi(w)$. Da B Basis von V ist, $\exists v_1,\dots,v_n \in B$ $\exists \alpha_1,\dots,\alpha_n, \beta_1,\dots,\beta_n \in K: v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Aus

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \varphi(v) = \varphi(w) = \varphi(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(v_i)$ folgt

$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\varphi(v_i)=\sigma$. Da $\varphi(B)$ l.u. ist, gilt $\beta_1-\alpha_1=\dots=\beta_n-\alpha_n=0$, d.h. $\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$ und daher $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i=w$.

<u>Satz 69</u> Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V\to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim_K V=\dim_K \operatorname{Kern}\varphi+\dim_K \operatorname{Bild}\varphi=\dim_K\operatorname{Kern}\varphi+\operatorname{Rang}\varphi.$$

<u>Beweis</u>: Nach Korollar 66(i) ist $\operatorname{Kern}\varphi$ ein Teilraum von V. Nach Korollar 31(ii) besitzt $\operatorname{Kern}\varphi$ eine endliche Basis $\{v_1,\dots,v_k\}$ (wobei $\dim_K\operatorname{Kern}\varphi=k$). Diese kann zu einer Basis $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ von V ergänzt werden. (Dabei ist $\dim_K V=n$. Um diese Basis zu finden, gehe von einer Basis $\{w_1,\dots,w_n\}$ von V aus und wende den Austauschsatz von Steinitz an.) Wir zeigen, dass $\{\varphi(v_{k+1}),\dots,\varphi(v_n)\}$ eine Basis von $\varphi(V)$ ist. Offensichtlich ist $[\varphi(v_{k+1}),\dots,\varphi(v_n)]\subseteq\varphi(V)$. Ist $w\in\varphi(V)$, so $\exists v\in V: \varphi(v)=w$. Da $\{v_1,\dots,v_n\}$ Basis von V ist, $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K: v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$ und daher

$$w=\varphi(v)=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(v_i)}_{=\sigma}+\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i\varphi(v_i)=\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i\varphi(v_i)\in[\varphi(v_{k+1}),\dots,\varphi(v_n)].$$

Also gilt auch $\varphi(V)\subseteq[\varphi(v_{k+1}),\dots,\varphi(v_n)]$ und $\{\varphi(v_{k+1}),\dots,\varphi(v_n)\}$ ist Erzeugendensystem von $\varphi(V)$.

Ist $\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i\varphi(v_i)=\sigma$, so ist $\varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i v_i\right)=\sigma$, d.h. $\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i v_i\in\operatorname{Kern}\varphi$. Da $\{v_1,\dots,v_k\}$ Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist, $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_k\in K: \sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i v_i=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i$. Daraus folgt $\sum_{i=1}^{k}(-\alpha_i)v_i+\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i v_i=\sigma$ und daher $\alpha_{k+1}=\dots=\alpha_n=0$ (da $\{v_1,\dots,v_n\}$ Basis ist).

Also ist $\{\varphi(v_{k+1}),\dots,\varphi(v_n)\}$ auch l.u. Insgesamt erhält man

$$\operatorname{Rang}\varphi=\dim_K\operatorname{Bild}\varphi=n-k=\dim_K V-\dim_K\operatorname{Kern}\varphi.$$

<u>Korollar 70</u> Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V\to W$ eine lineare Abbildung.

(i) $\operatorname{Rang}\varphi\le\dim_K V$,

(ii) φ ist injektiv $\iff\operatorname{Rang}\varphi=\dim_K V$,

(iii) φ ist surjektiv $\iff\operatorname{Rang}\varphi=\dim_K W$.

<u>Beweis</u>: (i) $\dim_K V\overset{\text{Satz 69}}{=}\underbrace{\dim_K\operatorname{Kern}\varphi}_{\ge 0}+\operatorname{Rang}\varphi\ge\operatorname{Rang}\varphi$

(ii) φ ist injektiv $\overset{\text{Satz 68}}{\iff}\dim_K\operatorname{Kern}\varphi=0\overset{\text{Satz 69}}{\iff}\dim_K V-\operatorname{Rang}\varphi=0\iff\operatorname{Rang}\varphi=\dim_K V$

(iii) φ ist surjektiv $\iff\operatorname{Bild}\varphi=W\overset{\text{Kor 31 (ii)}}{\iff}\dim_K W=\dim_K\operatorname{Bild}\varphi=\operatorname{Rang}\varphi$

Korollar 71 Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K V = \dim_K W$ und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist injektiv,
(ii) φ ist surjektiv,
(iii) φ ist bijektiv.

Beweis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) φ ist injektiv $\overset{\text{Kor. 70 (ii)}}{\Longleftrightarrow}$ $\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K V \Leftrightarrow \operatorname{Rang}\varphi = \dim_K W$ $\overset{\text{Kor. 70 (iii)}}{\Longleftrightarrow}$ φ ist surjektiv

(i) $\Rightarrow$ (iii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) Gilt (i) oder (ii), so gilt wegen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) auch die andere der beiden Bedingungen und daher (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (ii) sind trivial

Korollar 72 Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind äquivalent:

(i) $V \cong W$,
(ii) $\dim_K V = \dim_K W$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $V \cong W$, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$ und daher $\dim_K V \overset{\text{Kor. 70 (ii)}}{=} \operatorname{Rang}\varphi \overset{\text{Kor. 70 (iii)}}{=} \dim_K W$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $n := \dim_K V = \dim_K W$, so ist $V \cong K^n \cong W$ nach Satz 60 und daher $V \cong W$ (wegen Satz 63).

18.11.2024