1.6 Determinanten

Satz 39 Für $n \in \mathbb{N}^+$ sei $S_n := \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$. Dann ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe (wobei $\circ$ die übliche Verknüpfung von Funktionen bezeichnet) mit $|S_n| = n!$ Elementen.
Diese Gruppe ist abelsch für $n \in \{1,2\}$ und nicht abelsch für $n \geq 3$

Beweis: Abgeschlossenheit gilt, da die Verknüpfung $\tau \circ \sigma$ zweier bijektiver Abbildungen $\sigma, \tau \in S_n$ wieder bijektiv ist. Assoziativität gilt für die Verknüpfung von Funktionen ganz allgemein. Neutrales Element ist $\varepsilon : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, $\varepsilon(a) = a$ für $1 \leq a \leq n$ Ist $\sigma \in S_n$, so ist auch $\sigma^{-1} : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ bijektiv und daher $\sigma^{-1} \in S_n$. Da die Elemente von S_n den möglichen Anordnungen der n Zahlen $1,2,\dots,n$ entsprechen, gibt es davon $n!$ Stück und $|S_n| = n!$.
Für $n=1$ ist $S_1 = \{\varepsilon\}$ (mit $\varepsilon(1) = 1$) trivialerweise abelsch.
Für $n=2$ ist $S_2 = \{\varepsilon, \tau\}$ (mit $\varepsilon(1) = 1, \varepsilon(2) = 2$ und $\tau(1) = 2, \tau(2) = 1$). Wegen $\varepsilon \circ \varepsilon = \tau \circ \tau = \varepsilon$ und $\varepsilon \circ \tau = \tau \circ \varepsilon = \tau$ ist auch S_2 abelsch.
Für $n \geq 3$ betrachte $\sigma, \tau \in S_n$ mit $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$ und $\sigma(a) = a$ für $3 \leq a \leq n$ sowie $\tau(1) = 3, \tau(3) = 1$ und $\tau(a) = a$ für $a = 2$ oder $a \geq 4$. Dann ist $(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(2) = 2$ und $(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(3) = 3$ und daher $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$.

Definition: Die Gruppe $(S_n, \circ)$ wird symmetrische Gruppe und ihre Elemente Permutationen genannt.

Definition: Ein $\zeta \in S_n$ heißt Zyklus (oder genauer k-Zyklus) wenn es (paarweise verschiedene) $a_1,\dots,a_k \in \{1,\dots,n\}$ gibt, sodass $\zeta(a_i) = a_{i+1}$ für $1 \leq i < k$, $\zeta(a_k) = a_1$ und $\zeta(b) = b$ für $b \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a_1,\dots,a_k\}$. Man schreibt dafür $\zeta = (a_1\ a_2 \dots a_k)$.

Definition: Ein $\tau \in S_n$ heißt Transposition, wenn τ ein 2-Zyklus ist. (D.h. es gibt (verschiedene) $a, b \in \{1,\dots,n\}$, sodass $\tau(a) = b, \tau(b) = a$ und $\tau(c) = c$ für $c \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a,b\}$.)
Man schreibt dafür $\tau = (a\ b)$.

Lemma 40 Sind der k-Zyklus $\sigma = (a_1 \dots a_k)$ und der l-Zyklus $\tau = (b_1 \dots b_l)$ (mit $\sigma, \tau \in S_n$) elementfremd (d.h. $\{a_1,\dots,a_k\} \cap \{b_1,\dots,b_l\} = \emptyset$), so ist $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

Beweis: $(\sigma \circ \tau)(a_i) = (\tau \circ \sigma)(a_i) = \sigma(a_i)$ für $1 \leq i \leq k$, $(\sigma \circ \tau)(b_i) = (\tau \circ \sigma)(b_i) = \tau(b_i)$ für $1 \leq i \leq l$ und $(\sigma \circ \tau)(c) = (\tau \circ \sigma)(c) = c$ für $c \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a_1,\dots,a_k, b_1,\dots,b_l\}$.

Satz 41 Jedes $\sigma \in S_n$ kann als Verknüpfung paarweise elementfremder Zyklen geschrieben werden.

19.10.2024

Beweis: Falls $\sigma = \varepsilon$ ist σ Verknüpfung von lauter 1-Zyklen.
Falls $\sigma \neq \varepsilon$ sei a_1 das kleinste $a \in \{1,\dots,n\}$ mit der Eigenschaft $\sigma(a) \neq a$. Betrachte die Folge $a_1, a_2 = \sigma(a_1), a_3 = \sigma(a_2), \dots$ Da $\{1,\dots,n\}$ endlich ist, muss irgendwann $\sigma(a_i) \in \{a_1,\dots,a_i\}$ gelten. Es sei k das kleinste i mit dieser Eigenschaft, d.h. $\sigma(a_k) \in \{a_1,\dots,a_k\}$. Da σ injektiv ist, muss $\sigma(a_k) = a_1$ gelten.

Wir setzen nun $\tau := (a_1 \dots a_k)^{-1} \circ \sigma = (a_k \dots a_1) \circ \sigma$. Dann ist $\sigma = (a_1 \dots a_k) \circ \tau$ und $\tau \in S_n$ hat die Eigenschaft $\tau(a_i) = a_i$ für $1 \le i \le k$ und $\tau(c) = \sigma(c)$ für $c \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Verfahre weiter so bis alle Elemente von $\{1, \dots, n\}$, die durch σ nicht auf sich selbst abgebildet werden, erfasst sind.

Korollar 42 Jedes $\sigma \in S_n$ kann als Verknüpfung von Transpositionen geschrieben werden.

Beweis: Folgt aus Satz 41 und der Gleichung $(a_1 \dots a_k) = (a_1\, a_2) \circ (a_2\, a_3) \circ \dots \circ (a_{k-1}\, a_k)$.

Definition Es sei $\sigma \in S_n$. Mit ω bezeichnen wir die Anzahl der Paare (i,j) mit der Eigenschaft $1 \le i < j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$. Das Signum von σ ist definiert als $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\omega}$. Man sagt, σ sei gerade wenn $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ und σ sei ungerade wenn $\operatorname{sgn} \sigma = -1$.

Lemma 43 Für $\sigma \in S_n$ ist $\operatorname{sgn} \sigma = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

Beweis: Im Zähler und Nenner stehen die selben Differenzen mit einem Vorzeichenwechsel für jedes Paar (i,j) mit $1 \le i < j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Satz 44 Für $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau$.

Beweis: Wegen Lemma 43 gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma \circ \tau)(j) - (\sigma \circ \tau)(i)}{j - i} = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{(\sigma \circ \tau)(j) - (\sigma \circ \tau)(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau$$

Korollar 45 (i) Ist $\tau \in S_n$ eine Transposition, so ist $\operatorname{sgn} \tau = -1$,

(ii) Ist $\sigma \in S_n$ gerade (bzw. ungerade) und $\sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$ für gewisse Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k$, so ist k gerade (bzw. ungerade)

Beweis: (i) Ist $\tau = (i\, j)$, so kann man (wegen $(i\, j) = (j\, i)$) o.B.d.A. $i < j$ voraussetzen. Die für die Bestimmung von ω relevanten Paare sind (i,k) und (k,j) mit $i < k < j$ und (i,j). Daher ist ω ungerade und $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

(ii) Wegen Satz 44 und (i) ist $\operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn}(\tau_k \circ \dots \circ \tau_1) = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} \tau_i = (-1)^k$

Definition: Es sei K ein Körper. Eine Funktion $D_n : K^{n \times n} \to K$ heißt Determinantenfunktion, wenn sie folgende drei Eigenschaften besitzt:

1) Hat $A \in K^{n \times n}$ die Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$, so ist D_n linear als Funktion jeder dieser Spalten, d.h. ist $A^i = B^i + C^i$ (für $1 \le i \le n$), so gilt

$$D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, B^i + C^i, A^{i+1}, \dots, A^n) = D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, B^i, A^{i+1}, \dots, A^n) + D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, C^i, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

bzw. ist $A^i = \alpha B^i$ (für $1 \le i \le n$), so gilt

$$D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, \alpha B^i, A^{i+1}, \dots, A^n) = \alpha D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, B^i, A^{i+1}, \dots, A^n),$$

2) Ist $A^i = A^{i+1}$ für $1 \le i < n$ (d.h. sind zwei nebeneinander liegende Spalten gleich), so ist $D_n(A^1, \dots, A^n) = 0$,

3) $D_n(I_n) = 1$ (wobei $I_n \in K^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet)

Bemerkungen: 1) Anschaulich bezeichnet D_n das (n-dimensionale) mit einem Vorzeichen versehene Volumen des von den Vektoren $A^1, \dots, A^n$ aufgespannten (n-dimensionalen) Parallelepipeds. Das Vorzeichen hängt von der Lage der Vektoren zueinander bzw. ihrer Reihenfolge ab.

2) Wir werden zeigen, dass es genau eine Funktion mit diesen drei Eigenschaften gibt.

Lemma 46 Es sei $D_n : K^{n \times n} \to K$ eine Determinantenfunktion

(i) Vertauscht man zwei nebeneinander liegende Spaltenvektoren A^i, A^{i+1} (mit $1 \le i < n$), so ändert sich das Vorzeichen, d.h.

$$D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, A^{i+1}, A^i, A^{i+2}, \dots, A^n) = - D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, A^{i+2}, \dots, A^n),$$

(ii) Sind zwei Spaltenvektoren gleich (d.h. $A^i = A^j$ für $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$), so ist $D_n(A) = 0$,

(iii) Vertauscht man zwei (beliebige) Spaltenvektoren von A, so ändert sich das Vorzeichen, d.h. $D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n) = - D_n(A^1, \dots, A^j, \dots, A^i, \dots, A^n)$,

(iv) Sind die Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$ von A l.a., so ist $D_n(A) = 0$

(Anders ausgedrückt: Ist $\operatorname{rang} A < n$, so ist $D_n(A) = 0$.)

(v) Addiert man zu einer Spalte von A das Vielfache einer anderen, so ändert sich der Wert nicht, d.h. ist $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$ und $\alpha \in K$, so

$$D_n(A^1, \dots, A^i + \alpha A^j, \dots, A^j, \dots, A^n) = D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n),$$

(vi) Für $\sigma \in S_n$ ist $D_n(A^{\sigma(1)}, \dots, A^{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot D_n(A^1, \dots, A^n)$.

Beweis: (i) $0 \overset{2)}{=} D_n(A^1, \dots, A^i + A^{i+1}, A^i + A^{i+1}, \dots, A^n)$

$$\overset{1)}{=} \underbrace{D_n(A^1, \dots, A^i, A^i, \dots, A^n)}_{\overset{2)}{=} 0} + D_n(A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, \dots, A^n) + D_n(A^1, \dots, A^{i+1}, A^i, \dots, A^n) + \underbrace{D_n(A^1, \dots, A^{i+1}, A^{i+1}, \dots, A^n)}_{\overset{2)}{=} 0}$$

$$\Rightarrow D_n(A^1, \dots, A^{i+1}, A^i, \dots, A^n) = - D_n(A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

(ii) OBdA sei $i < j$. Wir vertauschen A^j mit dem Spaltenvektor links davon bis A^i und A^j nebeneinander liegen. Dabei wechselt nach (i) jedesmal das Vorzeichen. Muss man dabei ω Vertauschungen durchführen, so ist

$$D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n) = (-1)^\omega \cdot D_n(A^1, \dots, A^i, A^j, A^{i+1}, \dots, A^{j-1}, A^{j+1}, \dots, A^n) \overset{2)}{=} 0$$

(iii) $0 \overset{(ii)}{=} D_n(A^1, \dots, A^i + A^j, \dots, A^i + A^j, \dots, A^n)$

$$\overset{1)}{=} \underbrace{D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^i, \dots, A^n)}_{\overset{(ii)}{=} 0} + D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n) + D_n(A^1, \dots, A^j, \dots, A^i, \dots, A^n) + \underbrace{D_n(A^1, \dots, A^j, \dots, A^j, \dots, A^n)}_{\overset{(ii)}{=} 0}$$

$$\Rightarrow D_n(A^1,\dots,A^j,\dots,A^i,\dots,A^n) = -D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n)$$

(iv) Nach Lemma 26 $\exists k\in\{1,\dots,n\}\ \exists \alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n\in K : A^k = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\neq k}} \alpha_i A^i$

$$\Rightarrow D_n(A^1,\dots,A^k,\dots,A^n) = D_n\Big(A^1,\dots,\sum_{\substack{1\le i\le k\\ i\neq k}}\alpha_i A^i,\dots,A^n\Big) \overset{1)}{=} \sum_{\substack{1\le i\le k\\ i\neq k}} \alpha_i \underbrace{D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0} = 0$$

30.10.2024

(v) $D_n(A^1,\dots,A^i+\alpha A^j,\dots,A^j,\dots,A^n)$

$$\overset{1)}{=} D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n) + \alpha \underbrace{D_n(A^1,\dots,A^j,\dots,A^j,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0} = D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n)$$

(vi) Nach Korollar 42 gibt es Transpositionen $\tau_1,\dots,\tau_k\in S_n$, sodass $\sigma=\tau_k\circ\dots\circ\tau_1$. Jede Transposition entspricht dem Vertauschen zweier Spaltenvektoren und lässt daher (wegen (iii)) das Vorzeichen wechseln

$$\Rightarrow D_n(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)}) \overset{(iii)}{=} (-1)^k D_n(A^1,\dots,A^n) \overset{\text{Kor. 45}}{=} \operatorname{sgn}\sigma\cdot D_n(A^1,\dots,A^n).$$

<u>Satz 47</u> (Eindeutigkeit der Determinantenfunktion) Es gibt höchstens eine Determinantenfunktion $D_n: K^{n\times n}\to K$. Ist $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in K^{n\times n}$, so ist

$$D_n(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} \qquad \text{(LEIBNIZ-Formel)}$$

<u>Beweis</u>: Wir bezeichnen die Elemente der Standardbasis des K^n wieder mit $E^1,\dots,E^n$. Es sei $D_n: K^{n\times n}\to K$ eine Determinantenfunktion. Besitzt $A\in K^{n\times n}$ die Spaltenvektoren $A^1,\dots,A^n$, so ist

$$D_n(A) = D_n(A^1,\dots,A^n) = D_n\Big(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} E^{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n}E^{i_n}\Big)$$

$$\overset{1)}{=} \sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}\cdot D_n(E^{i_1},\dots,E^{i_n}).$$

Ist $E^{i_j}=E^{i_k}$ für $1\le j,k\le n, j\neq k$, so ist (wegen Lemma 46 (ii)) $D_n(E^{i_1},\dots,E^{i_n})=0$. Andernfalls ist $i_1,\dots,i_n$ eine Permutation von $1,\dots,n$, d.h. es gibt ein $\sigma\in S_n$ mit $i_1=\sigma(1),\dots,i_n=\sigma(n)$ und daher

$$D_n(E^{i_1},\dots,E^{i_n}) = D_n(E^{\sigma(1)},\dots,E^{\sigma(n)}) \overset{\text{Lemma 46 (vi)}}{=} \operatorname{sgn}\sigma\cdot D_n(E^1,\dots,E^n)$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma\cdot\underbrace{D_n(I_n)}_{\overset{3)}{=}1} = \operatorname{sgn}\sigma$$

Durch Einsetzen erhält man $D_n(A) = \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\cdot\operatorname{sgn}\sigma$.

<u>Satz 48</u> (Existenz der Determinantenfunktionen) Für jedes $n\in\mathbb{N}^+$ gibt es eine Determinantenfunktion $D_n: K^{n\times n}\to K$.

Beweis: Induktion nach n.

$n=1$: $K^{1\times 1} \to K$, $a \mapsto a$ erfüllt alle Eigenschaften

$n=2$: Diesen Fall könnte man auslassen. Er dient der Motivation

Die Abbildung $D_2 : K^{2\times 2} \to K$, $D_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ hat alle geforderten Eigenschaften:

1) $D_2\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{pmatrix} = (a_1+a_2)d - b(c_1+c_2) = (a_1d - bc_1) + (a_2d - bc_2) = D_2\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} + D_2\begin{pmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{pmatrix}$,

$D_2\begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix} = (\alpha a)d - b(\alpha c) = \alpha(ad - bc) = \alpha D_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und analog für die 2. Spalte

2) $D_2\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$ 3) $D_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$

Es sei nun $n \geq 2$ (oder $n \geq 3$ wenn man das bevorzugt) und die Existenz von Determinantenfunktion $D_1, \ldots, D_{n-1}$ schon gezeigt. Für $A \in K^{n\times n}$ bezeichne $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ jene Matrix, die man aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält. Für ein fest gewähltes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $D^n : K^{n\times n} \to K$ definiert durch

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{n-1}(A_{in})$$

(„Entwicklung nach der i-ten Zeile")

Nach Satz 47 ist D_{n-1} dabei eindeutig bestimmt. Die Abbildung D_n scheint von der Wahl von $i \in \{1, \ldots, n\}$ abzuhängen. Sobald man gezeigt hat, dass D_n tatsächlich eine Determinantenfunktion ist, folgt aus Satz 47, dass man für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die selbe Abbildung erhält.

1) Es sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $A^1, \ldots, A^n$ und $A^k = B^k + C^k$ (wobei $1 \leq k \leq n$). Weiters bezeichne $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ die beiden Matrizen mit Spaltenvektoren $A^1, \ldots, A^{k-1}, B^k, A^{k+1}, \ldots, A^n$ bzw $A^1, \ldots, A^{k-1}, C^k, A^{k+1}, \ldots, A^n$ sowie A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} die Matrizen, die man aus A, B, C durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält. Da D_{n-1} linear in jeder Spalte ist, gilt

$$D_{n-1}(A_{ij}) = D_{n-1}(B_{ij}) + D_{n-1}(C_{ij}) \quad \text{für } 1 \leq j \leq n, j \neq k.$$

Weiters sind $A_{ik} = B_{ik} = C_{ik}$ und $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$. Es folgt

$$D_n(A) = D_n(A^1, \ldots, A^n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq k}} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) + (-1)^{i+k} a_{ik} D_{n-1}(A_{ik})$$

$$= \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq k}} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(D_{n-1}(B_{ij}) + D_{n-1}(C_{ij})\right) + (-1)^{i+k}(b_{ik} + c_{ik}) D_{n-1}(A_{ik})$$

$$= \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq k}} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(D_{n-1}(B_{ij}) + D_{n-1}(C_{ij})\right) + (-1)^{i+k}\left(b_{ik} D_{n-1}(B_{ik}) + c_{ik} D_{n-1}(C_{ik})\right)$$

$$= \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq k}} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{=b_{ij}} D_{n-1}(B_{ij}) + (-1)^{i+k} b_{ik} D_{n-1}(B_{ik})$$

$$+ \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq k}} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{=c_{ij}} D_{n-1}(C_{ij}) + (-1)^{i+k} c_{ik} D_{n-1}(C_{ik})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} D_{n-1}(B_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} D_{n-1}(C_{ij}) = D_n(B) + D_n(C)$$

Es sei $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^{k-1}, \alpha A^k, A^{k+1}, \dots, A^n$ sowie B_{ij} die Matrix, die man aus B durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält. Da D_{n-1} linear in jeder Spalte ist, gilt $D_{n-1}(B_{ij}) = \alpha D_{n-1}(A_{ij})$ für $1\le j\le n, j\neq k$. Weiters ist $A_{ik} = B_{ik}$ und $b_{ik} = \alpha a_{ik}$. Es folgt

$$D_n(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} D_{n-1}(B_{ij})$$

$$= \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq k}} (-1)^{i+j} \cdot \underbrace{b_{ij}}_{=a_{ij}} \cdot \underbrace{D_{n-1}(B_{ij})}_{=\alpha D_{n-1}(A_{ij})} + (-1)^{i+k} \underbrace{b_{ik}}_{=\alpha a_{ik}} \cdot D_{n-1}(\underbrace{B_{ik}}_{=A_{ik}})$$

$$= \alpha \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq k}} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) + \alpha (-1)^{i+k} a_{ik} D_{n-1}(A_{ik})$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) = \alpha D_n(A)$$

2) Ist $A^k = A^{k+1}$ für $1\le k< n$, so ist

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\notin\{k,k+1\}}} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{D_{n-1}(A_{ij})}_{=0} + (-1)^{i+k} a_{ik} D_{n-1}(A_{ik}) + (-1)^{i+k+1} \underbrace{a_{i,k+1}}_{=a_{ik}} D_{n-1}(\underbrace{A_{i,k+1}}_{=A_{ik}})$$

$$= (-1)^{i+k}\left(a_{ik} D_{n-1}(A_{ik}) - a_{ik} D_{n-1}(A_{ik})\right) = 0$$

3) Ist $A = I_n$, so

$$D_n(I_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\neq i}} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{=0} D_{n-1}(A_{ij})}_{=0} + \underbrace{(-1)^{2i}}_{=1} \underbrace{a_{ii}}_{=1} \underbrace{D_{n-1}(\underbrace{A_{ii}}_{=I_{n-1}})}_{=1} = 1$$

<u>Korollar 49</u> Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Dann gibt es genau eine Determinantenfunktion $K^{n\times n} \to K$.

<u>Beweis:</u> Folgt aus Satz 47 und Satz 48

<u>Definition:</u> Die nach Korollar 49 eindeutige Determinantenfunktion wird Determinante einer Matrix genannt. Ist $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$, so schreibt man dafür $\det(A)$ oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

<u>Bemerkungen:</u> 1) Die Größe der Matrix A wird in der Notation unterdrückt, d.h. man schreibt $\det A$ und nicht $\det_n A$.

2) Die Leibniz-Darstellung $\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ aus Satz 47 hat großen theoretischen Wert, ist für die Berechnung einer Determinante aber schlecht geeignet.

3) Determinanten von 2×2-Matrizen berechnet man mit Hilfe des Schemas

$$\begin{array}{c} + \qquad\qquad - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

4) Determinanten von 3×3-Matrizen kann man mit Hilfe der Regel von SARRUS berechnen:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - \quad - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

4.11.2024

5) Für $n \ge 4$ kann man Determinanten <u>nicht</u> auf analoge Weise berechnen. (Nach der Leibniz-Formel müssen $n!$ Summanden auftreten und für $n\ge 4$ ist $n! \ge n(n-1) > 2n$.)

Für $n \ge 2$ kann man Determinanten mit Hilfe der rekursiven Definition aus dem Beweis von Satz 48 berechnen (Entwicklung nach der i-ten Zeile):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad (\text{LAPLACEscher Entwicklungssatz})$$

Den Wert des „Vorzeichens" $(-1)^{i+j}$ findet man dabei leicht mit Hilfe des „Schachbrettmusters"

$$\begin{array}{ccccc} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

<u>Beispiele:</u> 1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - (-1)\cdot 7 = 24 + 7 = 31$

Man kann diese Rechnung nicht nur als Anwendung von Bemerkung 3) sondern auch als Entwicklung nach der 1. oder 2. Zeile lesen.

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot2 + 1\cdot1\cdot(-1) + \underbrace{4\cdot0\cdot2}_{=0} - 4\cdot3\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot2 - \underbrace{1\cdot0\cdot2}_{=0} = 12-1+12-4 = 24-5 = 19$

mittels Regel von Sarrus oder

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(4+4) - (4+1) = 24-5 = 19$$

mittels Entwicklung nach der 2. Zeile.

3) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{-3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(10-6) = -4$

mittels Entwicklung nach der 1. Zeile oder

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,(3+10-6-5) = -2\cdot2 = -4$$

mittels Entwicklung nach der 3. Zeile

Satz 50 Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann ist $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$.

Beweis: Es seien $A^1, \dots, A^n$ Spaltenvektoren von A und $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Dann hat $A\cdot B$ die Spaltenvektoren $\sum_{i=1}^n b_{i1} A^i, \dots, \sum_{i=1}^n b_{ij} A^i, \dots, \sum_{i=1}^n b_{in} A^i$ und daher

$$\det(A\cdot B) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} A^{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} A^{i_n}\right)$$

$$\overset{1)}{=} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1,1}\cdots b_{i_n,n} \det(A^{i_1}, \dots, A^{i_n})$$

$$\overset{\text{Lemma 46 (ii)}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(n),n}\cdot \det(A^{\sigma(1)}, \dots, A^{\sigma(n)})$$

$$\overset{\text{Lemma 46 (vi)}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(n),n}\cdot \operatorname{sgn}\sigma\cdot \det(A^1, \dots, A^n)$$

$$= (\det A)\cdot \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot b_{\sigma(1),1}\cdots b_{\sigma(n),n} = (\det A)\cdot(\det B)$$

Korollar 51 Für $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar,

(ii) $\det A \neq 0$.

Gilt eine (und damit beide) dieser Bedingungen, so ist $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist A invertierbar, so $\exists\, A^{-1} \in K^{n\times n}: A\cdot A^{-1} = A^{-1}A = I_n$ und wegen Satz 50 folgt $1 = \det I_n = \det(A\cdot A^{-1}) = (\det A)\cdot(\det A^{-1})$. Also ist $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist A nicht invertierbar, so ist $\operatorname{rang} A < n$ (wegen Satz 38 (iv)) und daher $\det A = 0$ (wegen Lemma 46 (iv)).

<u>Korollar 52</u> Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$, so ist $GL_n(K) = \{A \in K^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$.

<u>Beweis:</u> Folgt aus Korollar 51.

<u>Lemma 53</u> Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so ist $G = \{a^{-1} \mid a \in G\}$.

<u>Beweis:</u> Die Abbildung $\varphi: G \to G, \varphi(a) = a^{-1}$ ist bijektiv, denn
$\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} = b$ und $a = (a^{-1})^{-1} = \varphi(a^{-1})$ $\forall a \in G$

<u>Satz 54</u> Für $A \in K^{n\times n}$ ist $\det(A^T) = \det A$.

<u>Beweis:</u> Für jedes $\sigma \in S_n$ ist $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$, da $1 = \operatorname{sgn}\varepsilon = \operatorname{sgn}(\sigma\circ\sigma^{-1}) \overset{\text{Satz 44}}{=} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot(\operatorname{sgn}\sigma^{-1})$ und $S_n = \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\}$ nach Lemma 53. Ist nun $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, so ist
$a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$ $\forall \sigma \in S_n$ und daher

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \det(A^T)$$

da $A^T = (a_{ji})_{1\le i,j\le n}$.

<u>Korollar 55</u> Es sei $A \in K^{n\times n}$

(i) Die Abbildung $A \mapsto \det A$ ist linear in allen Zeilen von A,

(ii) Sind zwei Zeilen von A gleich, so ist $\det A = 0$,

(iii) Vertauscht man zwei Zeilen von A, so wechselt das Vorzeichen der Determinante,

(iv) Sind die Zeilenvektoren von A l.a., so ist $\det A = 0$,

(v) Addiert man zu einer Zeile von A das Vielfache einer anderen, so ändert sich der Wert der Determinante nicht,

(vi) Man kann $\det A$ berechnen, indem man nach einer Spalte entwickelt, d.h.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$$= (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

<u>Beweis:</u> Alle Aussagen folgen aus Satz 54 und den analogen Aussagen für Spalten einer Determinante (d.h. (i): Def. Determinantenfunktion, Eigenschaft 1) / (ii): Lemma 46 (ii) / (iii): Lemma 46 (iii) / (iv): Lemma 46 (iv) / (v): Lemma 46 (v) / (vi): Definition von D_n im Beweis von Satz 48)

Lemma 56 Ist $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$ und $a_{ij} = 0$ für $i > j$, so ist $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Beweis: Induktion nach n. $n=1$: Trivial $\left(n=2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11} a_{22} \right)$

Für $n \geq 2$ führe Entwicklung nach der letzten Zeile durch:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} \underbrace{a_{nj}}_{=0} \det A_{nj} + \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} a_{nn} \det A_{nn}$$

$$= a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ \text{\huge 0} & & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = a_{nn} \cdot (a_{11} \cdots a_{n-1,n-1}) = a_{11} \cdots a_{nn}$$

Bemerkung: Oft sind Zeilen- und Spaltenumformungen der einfachste Weg, eine Determinante zu berechnen.

Beispiel: Wir berechnen nochmals Bsp. 3) von Seite 37.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{Vertausche 1. und 4. Zeile}) = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{Ersetze 2. Zeile durch 2. Zeile} - 5 \times \text{1. Zeile}) = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{Vertausche 2. und 3. Zeile}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \text{Ersetze 3. und 4. Zeile durch 3. Zeile} + 7 \times \text{2. Zeile} \\ \text{und 4. Zeile} - \tfrac{3}{2} \times \text{2. Zeile} \end{array} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{Ersetze 4. Zeile durch 4. Zeile} + \tfrac{1}{2} \times \text{3. Zeile}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -4$$

(Bei dieser Determinante ist die Entwicklung nach der 3. Zeile allerdings geschickter.)

5.11.2024

Definition: Zu $A \in K^{n\times n}$ (mit $n\geq 2$) sei die (klassische) adjungierte Matrix $A^\# \in K^{n\times n}$ definiert als

$$A^\# = \left((-1)^{i+j}\det A_{ji}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \cdots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2}\det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & (-1)^{n+2}\det A_{2n} & \cdots & \det A_{nn} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet A_{kl} wieder die Matrix, die man aus A durch Streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte erhält.

Bemerkung: Achtung bei den Indizes. Z.B. steht an der Stelle mit Index $(1,2)$ (d.h. in der 1. Zeile und 2. Spalte) $-\det A_{21}$, das man aus A durch Streichen der 2. Zeile und 1. Spalte erhält!

Satz 57 Es sei $A \in K^{n\times n}$ (mit $n \geq 2$).

(i) $A\cdot A^\# = A^\# \cdot A = (\det A)\cdot I_n$,

(ii) Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = (\det A)^{-1}\cdot A^\#$.

Beweis: Die Matrix $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ habe Spaltenvektoren $A^1,\dots,A^n$. Bezeichnet $E^1,\dots,E^n$ wieder die Standardbasis, so ist (mit $1\leq i,j\leq n$)

$$\det(A^1,\dots,A^{i-1},E^j,A^{i+1},\dots,A^n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & 0 & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & 0 & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{l}\text{Entwicklung nach} \\ \text{der } i\text{-ten Spalte}\end{array}\right)$$

$$= (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$$

Für $1\leq i,k\leq n$ ist einerseits

$$\det(A^1,\dots,A^{i-1},A^k,A^{i+1},\dots,A^n) = \begin{cases} \det A & \text{falls } k=i \\ 0 & \text{falls } k\neq i \end{cases}$$

und andererseits

$$\det(A^1,\dots,A^{i-1},A^k,A^{i+1},\dots,A^n) = \det\Big(A^1,\dots,A^{i-1},\sum_{j=1}^n a_{jk}E^j, A^{i+1},\dots,A^n\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{jk}\det(A^1,\dots,A^{i-1},E^j,A^{i+1},\dots,A^n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}\det A_{ji}\cdot a_{jk}$$

Da $A^{\#}\cdot A = \Big(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j}\det A_{ji}\cdot a_{jk}\Big)_{1\le i,k\le n}$ ist damit $A^{\#}\cdot A = (\det A)\cdot I_n$ gezeigt.

Die Gleichung $A\cdot A^{\#} = (\det A)\cdot I_n$ zeigt man analog.

(ii) Folgt aus (i)

Beispiel: Wir berechnen A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9+2+16+4-6-12 = -5$. Ist $A^{-1} = (x_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, so

$$x_{11} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad x_{12} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}, \quad x_{13} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{6}{5}$$

$$x_{21} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad x_{22} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad x_{23} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_{31} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad x_{32} = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}, \quad x_{33} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}$$

also $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -6/5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4/5 & 7/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 5 & -5 & -5 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$