1.5 Der Rang einer Matrix

Definition: Es sei $A \in K^{m\times n}$ mit Zeilenvektoren $A_1,\dots,A_m$ und Spaltenvektoren $A^1,\dots,A^n$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \cdots a_{1n}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \cdots a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ \\ A_m \end{array} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ A^1 \quad\quad\quad A^n \end{array}$$

Der Zeilenrang von A wird durch $\dim_K [A_1,\dots,A_m]$ definiert (mit $[A_1,\dots,A_m]$ Teilraum von K^n).
Der Spaltenrang von A wird durch $\dim_K [A^1,\dots,A^n]$ definiert (mit $[A^1,\dots,A^n]$ Teilraum von K^m)

Bemerkung: Nach Kor. 32 ist der Zeilenrang von A die maximale Zahl l.u. Zeilenvektoren von A und der Spaltenrang von A die maximale Zahl l.u. Spaltenvektoren von A. 22.10.2024

Lemma 33 Der Zeilenrang einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ändert sich nicht, wenn eine der folgenden „elementaren Umformungen" vorkommt:

1) Vertauschen zweier Zeilen,
2) Vertauschen zweier Spalten,
3) Ersetzen eines Zeilenvektors A_i (mit $1\le i\le m$) durch den Zeilenvektor $B_i = A_i + \alpha A_j$ (mit $\alpha \in K$ und $1 \le j \le m, i \ne j$).

Beweis: 1) Folgt sofort daraus, dass sich $[A_1,\dots,A_m]$ und daher auch $\dim_K [A_1,\dots,A_m]$ nicht ändert, wenn man die Reihenfolge von $A_1,\dots,A_m$ ändert.

2) Vertauschen zweier Spalten entspricht dem Umnummerieren der Indizes in den Vektoren und ändert darum nichts an linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.

3) Wir zeigen $[A_1,\dots,A_m] = [A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_m]$
Nach Konstruktion ist $B_i \in [A_1,\dots,A_m]$. Also ist $A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_m \in [A_1,\dots,A_m]$ und daher $[A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_m] \subseteq [A_1,\dots,A_m]$. Umgekehrt folgt aus $A_i = B_i - \alpha A_j \in [A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_m]$, dass $A_1,\dots,A_m \in [A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_m]$, woraus $[A_1,\dots,A_m] \subseteq [A_1,\dots,A_{i-1},B_i,A_{i+1},\dots,A_m]$ folgt.

Lemma 34 Es sei K ein Körper. Die k Vektoren

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} \in K^n$$

sind genau dann l.a. (bzw. l.u.) wenn die k Vektoren

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1i} + \alpha b_{1j} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{ki} + \alpha b_{kj} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} \in K^n$$

l.a. (bzw. l.u.) sind. (D.h. im l-ten Vektor wurde die i-te Eintragung b_{li} durch $b_{li} + \alpha b_{lj}$ ersetzt, wobei b_{lj} die j-te Eintragung bezeichnet.) Dabei sind $1 \le i,j \le n$, $i \ne j$ und $\alpha \in K$.

Beweis: Gibt es $\beta_1,\dots,\beta_k \in K$ (nicht alle $=0$), derart dass

$$\beta_1\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{1n}\end{pmatrix}+\dots+\beta_k\begin{pmatrix} b_{k1}\\ \vdots \\ b_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$ so ist auch $$\beta_1\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{1i}+\alpha b_{1j}\\ \vdots \\ b_{1n}\end{pmatrix}+\dots+\beta_k\begin{pmatrix} b_{k1}\\ \vdots \\ b_{ki}+\alpha b_{kj}\\ \vdots \\ b_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$ da

$$\beta_1(b_{1i}+\alpha b_{1j})+\dots+\beta_k(b_{ki}+\alpha b_{kj}) = \underbrace{(\beta_1 b_{1i}+\dots+\beta_k b_{ki})}_{=0}+\alpha\underbrace{(\beta_1 b_{1j}+\dots+\beta_k b_{kj})}_{=0}=0.$$

Gibt es umgekehrt $\beta_1,\dots,\beta_k \in K$ (nicht alle $=0$), derart dass

$$\beta_1\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{1i}+\alpha b_{1j}\\ \vdots \\ b_{1n}\end{pmatrix}+\dots+\beta_k\begin{pmatrix} b_{k1}\\ b_{ki}+\alpha b_{kj}\\ \vdots \\ b_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$ so ist auch $$\beta_1\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots \\ b_{1n}\end{pmatrix}+\dots+\beta_k\begin{pmatrix} b_{k1}\\ \vdots \\ b_{kn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$ da

$$\beta_1 b_{1i}+\dots+\beta_k b_{ki} = \underbrace{\left(\beta_1(b_{1i}+\alpha b_{1j})+\dots+\beta_k(b_{ki}+\alpha b_{kj})\right)}_{=0}-\alpha\underbrace{(\beta_1 b_{1j}+\dots+\beta_k b_{kj})}_{=0}=0$$

Lemma 35 Der Spaltenrang einer Matrix $A\in K^{m\times n}$ ändert sich nicht, wenn man eine der elementaren Umformungen aus Lemma 33 vornimmt.

Beweis: 1) und 2) analog zum Beweis von Lemma 33

3) Ob eine Familie von Spaltenvektoren l.a. bzw. l.u. ist, ändert sich nach Lemma 34 durch eine Umformung dieser Art nicht. Insbesondere bleibt die maximale Anzahl l.u. Spaltenvektoren gleich.

Satz 36 Es sei $A\in K^{m\times n}$. Dann gibt es eine Folge elementarer Umformungen, durch die man, ausgehend von A, zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{rr} & * \cdots & * \\ & 0 & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

kommt. Dabei ist $0\le r\le m$, $a_{ii}\neq 0$ für $1\le i\le r$, die $*$ bezeichnen beliebige Elemente von K und alle übrigen Eintragungen sind $0\ (\in K)$. Sowohl der Zeilen- als auch der Spaltenrang sind daher r. Insbesondere stimmen Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix überein.

Beweis: Verwende folgenden Algorithmus:

1) Sind alle Eintragungen von A gleich 0, so ist man fertig und $r=0$

2) Ansonsten $\exists (i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}: a_{ij}\neq 0$,
   Ist $a_{11}\neq 0$, so gehe zu 3), ansonsten wähle $(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}: a_{ij}\neq 0$,
   Vertausche die 1. Zeile mit der i-ten Zeile,
   Vertausche die 1. Spalte mit der j-ten Spalte,
   Danach erhält man eine Matrix mit a_{ij} in der linken oberen Ecke

3) Wir nennen die so erhaltene Matrix $B^{(1)} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$. Wegen 2) ist $b_{11} \neq 0$.

Bezeichnen $B_1, \dots, B_m$ die Zeilen von $B^{(1)}$, so ersetze $B_2, \dots, B_m$ durch $B_2 - b_{21} b_{11}^{-1} B_1, \dots, B_m - b_{m1} b_{11}^{-1} B_1$. Danach erhält man eine Matrix der Gestalt

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_{11} \neq 0$$

Verfahre weiter so: Angenommen, man hat bereits eine Matrix $A^{(p)} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ der Gestalt

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{pp} & * \cdots & * \\ & 0 & & * \cdots & * \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & * \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{11}, \dots, a_{pp} \neq 0 \text{ gefunden}$$

(Wir schreiben wieder a_{ij} für die Eintragungen von $A^{(p)}$, obwohl sie natürlich nicht mit den Eintragungen von A übereinstimmen müssen.)

1) Sind alle Eintragungen im „rechten unteren Rechteck" gleich 0 (d.h. $a_{ij} = 0$ für $p < i \le m$, $p < j \le n$), so ist man fertig und $r = p$,

2) Ansonsten $\exists (i,j) \in \{p+1, \dots, m\} \times \{p+1, \dots, n\} : a_{ij} \neq 0$,
Ist $a_{p+1,p+1} \neq 0$, so gehe zu 3), ansonsten wähle $(i,j) \in \{p+1, \dots, m\} \times \{p+1, \dots, n\}$ mit $a_{ij} \neq 0$
Vertausche die $(p+1)$-te Zeile mit der i-ten Zeile,
Vertausche die $(p+1)$-te Spalte mit der j-ten Spalte,
Danach erhält man eine Matrix $B^{(p+1)} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, die die selbe Gestalt wie $A^{(p)}$ hat und $b_{p+1,p+1} \neq 0$ erfüllt. (Auch hier müssen die Eintragungen von $B^{(p+1)}$ natürlich nicht mit denen von $B^{(1)}$ übereinstimmen. Wir verwenden trotzdem wieder die selben Bezeichnungen.)

3) Bezeichnen $B_1, \dots, B_m$ die Zeilen von $B^{(p+1)}$, so ersetze $B_{p+2}, \dots, B_m$ durch $B_{p+2} - b_{p+2,p+1} \cdot b_{p+1,p+1}^{-1} B_{p+1}, \dots, B_m - b_{m,p+1} \cdot b_{p+1,p+1}^{-1} B_{p+1}$. Danach erhält man eine Matrix $A^{(p+1)}$ der Gestalt

$$A^{(p+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & a_{pp} & * & \cdots & * \\ & & & a_{p+1,p+1} & * \cdots & * \\ & 0 & & & * \cdots & * \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & * \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{11}, \dots, a_{p+1,p+1} \neq 0$$

Der Algorithmus bricht ab, wenn alle nachfolgenden Zeilen nur mehr 0 als Eintragung enthalten (oder die letzte Zeile erreicht wird, in der man eventuell noch zwei Spalten vertauschen muss, d.h. einen Teil von Schritt 2) durchführen muss).

Man erhält also eine Matrix der Gestalt

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{rr} & * & \cdots & * \\ & & & & & \\ & 0 & & & & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0$$

Wegen Lemmata 33 und 35 besitzt $A^{(r)}$ den selben Zeilen- und Spaltenrang wie die Ausgangsmatrix A. Der Zeilenrang von $A^{(r)}$ ist r, da die r (Zeilen) Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^T, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{rr} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^T \in K^n$$

l.u. und alle weiteren Zeilenvektoren $= 0$ sind.

Der Spaltenrang von $A^{(r)}$ ist mindestens r, da die r (Spalten) Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ a_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^m$$

l.u. sind.

Der Spaltenrang von $A^{(r)}$ ist höchstens r, da alle Spaltenvektoren von $A^{(r)}$ im r-dimensionalen Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \dots, x_r \in K \right\}$$

von K^m enthalten sind.

Bemerkung: In der Praxis kann und soll man den Algorithmus modifizieren, um die Rechnung zu vereinfachen und beschleunigen.

Definition: Es sei $A \in K^{m \times n}$. Wir definieren den Rang von A (für den wir $\operatorname{rang} A$ schreiben) als den Zeilenrang von A (der nach Satz 36 mit dem Spaltenrang von A übereinstimmt.)

28.10.2024

Bsp.: Zu bestimmen ist $\operatorname{rang} A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\text{Vertausche 1. und 2. Zeile}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -13 & 23 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Ersetze 2.-4. Zeile durch} \\ \text{2. Zeile} - 2 \times \text{1. Zeile} \\ \text{3. Zeile} + \text{1. Zeile} \\ \text{4. Zeile} - \text{1. Zeile} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Ersetze 2. Zeile durch 2. Zeile} + 3 \times \text{3. Zeile}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Ersetze 4. Zeile durch 4. Zeile} - \text{3. Zeile}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Zeilen vertauschen}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{3. und 4. Spalte vertauschen}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

<u>Korollar 37</u> Es sei $A \in K^{m \times n}$.

(i) $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$,

(ii) $\operatorname{rang} A^T = A$,

(iii) Sind $A^1, \dots, A^n$ die Spaltenvektoren von A, so ändert sich der Rang nicht, wenn man A^i durch $A^i + \alpha A^j$ ersetzt (mit $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ und $\alpha \in K$).

<u>Beweis</u>: (i) Da $[A_1, \dots, A_m]$ Teilraum von K^n ist (bzw. $[A^1, \dots, A^n]$ Teilraum von K^m), folgt (wegen Korollar 31 (ii)) $\operatorname{rang} A = \dim_K [A_1, \dots, A_m] \leq \dim_K K^n = n$ (bzw. $\operatorname{rang} A = \dim_K [A^1, \dots, A^n] \leq \dim_K K^m = m$).

(ii) Folgt wegen Satz 36 daraus, dass die Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren) von A^T gerade die Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von A sind.

(iii) Folgt aus (ii) und Lemma 33.

Satz 38 Es seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$.

(i) $\text{rang}(A\cdot B) \le \min\{\text{rang}\,A, \text{rang}\,B\}$,

(ii) Ist $p=n$ und B invertierbar, so ist $\text{rang}(A\cdot B) = \text{rang}(A)$,

(iii) Ist $m=n$ und A invertierbar, so ist $\text{rang}(A\cdot B) = \text{rang}(B)$,

(iv) Ist $m=n$, so gilt A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\text{rang}\,A = n$.

Beweis: (i) Sind $B^1,\dots,B^p$ die Spaltenvektoren von B, so sind $A\cdot B^1,\dots,A\cdot B^p$ die Spaltenvektoren von $A\cdot B$. Sind $A^1,\dots,A^n$ die Spaltenvektoren von A und $B=(b_{kl})_{\substack{1\le k\le n,\\ 1\le l\le p}}$ so ist $A\cdot B^i = b_{1i}\cdot A^1 + \dots + b_{ni}\cdot A^n \in [A^1,\dots,A^n]$ für $1\le i\le p$. Daher ist $[A\cdot B^1,\dots,A\cdot B^p]$ ein Teilraum von $[A^1,\dots,A^n]$ und somit (wegen Korollar 31 (ii))

$$\text{rang}(A\cdot B) = \dim_K [A B^1,\dots,A\cdot B^p] \le \dim_K [A^1,\dots,A^n] = \text{rang}\,A$$

und

$$\text{rang}(A\cdot B) \overset{\text{Kor. 37 (ii)}}{=} \text{rang}((A\cdot B)^T) \overset{\text{Satz 17}}{=} \text{rang}(B^T\cdot A^T) \le \text{rang}(B^T) \overset{\text{Kor. 37 (ii)}}{=} \text{rang}(B).$$

(ii) Aus (i) folgt $\text{rang}(A\cdot B) \le \text{rang}\,A$ und $\text{rang}\,A = \text{rang}((A\cdot B)\cdot B^{-1}) \le \text{rang}(A\cdot B)$.

(iii) Wegen Korollar 18 ist auch A^T invertierbar und

$$\text{rang}(A\cdot B) \overset{\text{Kor. 37 (ii)}}{=} \text{rang}((A\cdot B)^T) \overset{\text{Satz 17}}{=} \text{rang}(B^T\cdot A^T) \overset{\text{(ii)}}{=} \text{rang}(B^T) \overset{\text{Kor. 37 (ii)}}{=} \text{rang}\,B.$$

(iv) ($\Rightarrow$) Ist A invertierbar, so ist $\text{rang}\,A = \text{rang}(A\cdot I_n) \overset{\text{(iii)}}{=} \text{rang}\,I_n = n$.

($\Leftarrow$) Nach Definition von $\text{rang}\,A$ ist $\dim_K [A^1,\dots,A^n] = n$ und daher (wegen Kor. 31 (ii)) $[A^1,\dots,A^n] = K^n$. Bezeichnen $E^1,\dots,E^n$ die Spaltenvektoren der Einheitsmatrix I_n (für die wir sonst $e_1,\dots,e_n$ schreiben), so gilt $E^1,\dots,E^n \in [A^1,\dots,A^n]$. Daher folgt

$$\forall j\in\{1,\dots,n\}\ \exists b_{1j},\dots,b_{nj} \in K : E^j = b_{1j}A^1 + \dots + b_{nj}A^n$$

Setzt man $B := (b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$, so gilt nach Konstruktion $A\cdot B = I_n$. Analog findet man $C \in K^{n\times n}$, derart dass $C\cdot A = I_n$. Da

$$C = C\cdot I_n = C\cdot(A\cdot B) = (C\cdot A)\,B = I_n\cdot B = B$$

ist $B = C = A^{-1}$ und A daher invertierbar.