1.4 Basen

Def.: Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ paarweise verschieden. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen linear abhängig (kurz: l.a.) wenn es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gibt, die nicht alle $=0$ sind, derart dass $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Gibt es derartige $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ nicht, so heißen $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig (kurz: l.u.) über K.
Ist $M \subseteq V$ unendlich, so heißt M l.u. über K wenn jede endliche Teilmenge von M l.u. ist bzw. l.a. wenn es eine endliche Teilmenge von M gibt, die l.a. ist.

Bemerkungen: 1) Um zu zeigen, dass $v_1, \dots, v_n$ l.u. sind, reicht es, die Implikation
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ zu zeigen.

2) Die leere Menge $\emptyset$ ist l.u., da sie die Bedingung trivial erfüllt.

Lemma 25 Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$

(i) Ist $0 \in M$, so ist M l.a.,
(ii) Ist M l.a. und $M \subseteq N \subseteq V$, so ist auch N l.a.,
(iii) Ist M l.u. und $N \subseteq M$, so ist auch N l.u.,
(iv) Ist $v \in V$, so gilt: v ist l.u. $\Leftrightarrow v \neq 0$.

Beweis: (i) Folgt aus $1 \cdot 0 = 0$.
(ii) Da M l.a. ist, gibt es $v_1, \dots, v_n \in M$, die l.a. sind. Dann sind aber auch $v_1, \dots, v_n \in N$ l.a. und daher ist N l.a.
(iii) Sind $v_1, \dots, v_n \in N$, so sind auch $v_1, \dots, v_n \in M$ und daher $v_1, \dots, v_n$ l.u.
(iv) ($\Rightarrow$) Ist $v = 0$, so ist v l.a. nach (i).
($\Leftarrow$) Ist $v \neq 0$ und $\alpha \cdot v = 0$, so $\alpha = 0$ nach Lemma 20 (iii).

Beispiele: 1) $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind l.u. (über $\mathbb{R}$), denn $\alpha \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

2) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind l.u. (über $\mathbb{R}$), denn $\alpha \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 0 \\ 3\alpha = 0 \end{array}\right\}$
$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

3) Es sei K ein Körper. $e_1 = (1,0,\dots,0)^T, e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)^T \in K^n$ sind l.u. (über K), denn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = (0, \dots, 0)^T \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

4) Die Polynomfunktionen $p_0, p_1, p_2 \in P$ (mit $p_i(x) = x^i$ für $i \in \{0,1,2\}$) sind l.u. (über $\mathbb{R}$)
$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

1. Methode: Setze $x = 0, 1, -1$. Dann $\alpha_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

2. Methode: Durch Differenzieren erhält man $\alpha_1 + 2\alpha_2 x = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ und $2\alpha_2 = 0$
$\Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

15.10.2024

<u>Lemma 26</u> Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist l.a.,

(ii) $\exists v \in M$, das sich als Linearkombination (anderer) Elemente von M schreiben lässt, d.h. $\exists v_1, \dots, v_n \in M \setminus \{v\}$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. (Genauer: $\exists v \in M$: $v \in [M \setminus \{v\}]$.)

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) M l.a. $\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in M$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ (nicht alle $= 0$): $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sigma$

Da $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ nicht alle $= 0$ sind, $\exists j \in \{1, \dots, n\}$: $\alpha_j \neq 0$. Nun folgt

$$\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \alpha_i v_i + \alpha_j v_j = \sigma \Rightarrow \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \alpha_j^{-1} \alpha_i v_i + v_j = \sigma \Rightarrow v_j = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} (-\alpha_j^{-1} \alpha_i) v_i$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow (-1) v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sigma$ und $-1 \neq 0$.

<u>Definition</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Menge $M \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V, wenn $[M] = V$.

<u>Definition</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Menge $B \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn B l.u. (über K) und ein Erzeugendensystem von V ist.

<u>Satz 27</u> Es sei $V (\neq \{\sigma\})$ ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(i) B ist Basis von V,

(ii) Jedes $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombination von Elementen von B schreiben lassen.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $v \in V$. Da $[B] = V$, ist $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in B$. Ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ (mit $\beta_1, \dots, \beta_n \in K$), so $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = \sigma$. Da B l.u. ist, folgt $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$ und $\alpha_i = \beta_i$ für $1 \le i \le n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Da sich jedes $v \in V$ als Linearkombination von Elementen von B schreiben lässt, ist B Erzeugendensystem von V. Sind $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sigma$, so $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i$ und daher $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ wegen der Eindeutigkeit der Darstellung.

<u>Bspe.</u>: 1) $\emptyset$ ist Basis von $\{\sigma\}$.

2) $\{e_1, e_2\} = \left\{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1} \right\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$ (über $\mathbb{R}$). (Da $\binom{x}{y} = x \binom{1}{0} + y \binom{0}{1}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $[e_1, e_2] = \mathbb{R}^2$ und l.u. wurde schon gezeigt.)

3) $\left\{ \binom{2}{3}, \binom{-1}{0} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ (über $\mathbb{R}$). (Aus $\binom{x}{y} = \frac{y}{3} \binom{2}{3} + (-x + \frac{2y}{3}) \binom{-1}{0}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ folgt $\left[\binom{2}{3}, \binom{-1}{0} \right] = \mathbb{R}^2$ und l.u. wurde schon gezeigt.)

4) Es sei K ein Körper. $\{e_1, \dots, e_n\} = \{(1, 0, \dots, 0)^T, (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, (0, \dots, 0, 1)^T\}$ ist Basis des K^n (über K). (Aus $(x_1, \dots, x_n)^T = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ $\forall (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ folgt $[e_1, \dots, e_n] = K^n$ und l.u. wurde schon gezeigt.)

5) $\{p_0, p_1, p_2\}$ ist Basis von $\mathcal{P}_2$ (über $\mathbb{R}$). (Ist $p \in \mathcal{P}_2$, so $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ für gewisse $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, d.h. $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 \in [p_1, p_2, p_3]$ und l.u. wurde schon gezeigt.)

6) $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist Basis von $\mathcal{P}$ (über $\mathbb{R}$), wobei wieder $p_i(x) = x^i$ für $i \in \mathbb{N}$.

<u>Bemerkung</u>: Bspe 2) und 3) zeigen, dass Basen in der Regel nicht eindeutig bestimmt sind.

<u>Def.</u>: Es sei K ein Körper. Die Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ des K^n wird Standardbasis des K^n genannt.

<u>Lemma 28</u> Es sei V ein K-Vektorraum und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Wenn für ein $v \in V$ in der Darstellung $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ die Bedingung $\alpha_k \neq 0$ erfüllt ist, so ist auch $C = \{v_1, \dots, v_{k-1}, v, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

<u>Beweis</u>: Aus $C \subseteq V = [B]$ folgt $[C] \subseteq [[B]] = [B]$ wegen Kor. 24.

Aus $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_k v_k + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} \alpha_i v_i$ folgt $v_k = \alpha_k^{-1} v + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} (-\alpha_k^{-1} \alpha_i) v_i \in [C]$.

Da trivialerweise $v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n \in [C]$ ist $B \subseteq [C]$ und daher $[B] \subseteq [[C]] = [C]$.

Also ist $[C] = [B] = V$ und C ist ein Erzeugendensystem von V. C ist auch l.u., denn:

$$o = \beta v + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} \beta_i v_i = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} \beta_i v_i = \beta \alpha_k v_k + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} (\beta \alpha_i) v_i + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} \beta_i v_i$$

$$= \beta \alpha_k v_k + \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq k}} (\beta \alpha_i + \beta_i) v_i$$

Da B l.u. ist, folgt $\beta\alpha_1 + \beta_1 = \dots = \beta\alpha_{k-1} + \beta_{k-1} = \beta\alpha_k = \beta\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = \dots = \beta\alpha_n + \beta_{n+1} = 0$.

Aus $\alpha_k \neq 0$ folgt $\beta = 0$ und daher auch $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$

<u>Satz 29</u> (Austauschsatz von STEINITZ) Es sei $V (\neq \{o\})$ ein K-Vektorraum, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_k \in V$ l.u.

(i) $k \le n$,

(ii) Nach einer geeigneten Umnummerierung der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ist $B' = \{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ ebenfalls eine Basis von V. (D.h. ersetzt man k geeignete Vektoren aus B durch $w_1, \dots, w_k$, so erhält man wieder eine Basis von V.)

<u>Beweis</u>: Induktion nach k. $k=1$: Da $V \neq \{o\}$ ist $n \ge 1 = k$. Da B eine Basis ist, gibt es eine Darstellung $w_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Wäre $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, so wäre $w_1 = o$ l.a. Also $\exists j \in \{1, \dots, n\} : \alpha_j \neq 0$ und (ii) folgt aus Lemma 28 (wobei wir so umnummerieren, dass $k = 1$).

Angenommen, die Beh. wäre für $k-1$ schon gezeigt. Da (wegen Lemma 25 (iii)) auch $w_1, \dots, w_{k-1}$ l.u. sind, folgt nach IV $k-1 \le n$ und nach einer geeigneten Umnummerierung ist $C = \{w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n\}$ Basis von V. Wäre dabei $k-1 = n$, so wäre $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ eine Basis von V. Dann wäre $w_k \in [w_1, \dots, w_{k-1}]$ und $\{w_1, \dots, w_k\}$ wäre l.a. Also ist $k-1 < n$ und daher $k \le n$. Da C Basis ist, gibt es eine Darstellung $w_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i w_i + \sum_{i=k}^{n} \alpha_i v_i$.

Wäre dabei $\alpha_k = \dots = \alpha_n = 0$, so wäre $w_k \in [w_1, \dots, w_{k-1}]$ und $\{w_1, \dots, w_k\}$ wäre l.a. Also muss einer der Skalare $\alpha_k, \dots, \alpha_n$ von 0 verschieden sein. Nach einer eventuellen Umnummerierung kann man o.B.d.A. $\alpha_n \neq 0$ annehmen. Eine nochmalige Anwendung von Lemma 28 gibt, dass $\{w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ ebenfalls Basis von V ist (nach passender Umnummerierung).

<u>Korollar 30</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Besitzt V eine endliche Basis, so ist jede andere Basis von V ebenfalls endlich und besitzt die gleiche Anzahl von Elementen.

<u>Beweis:</u> Ist $V = \{0\}$, so ist nur $\emptyset$ Basis von V. Sei darum ab jetzt $V \neq \{0\}$.

Es seien $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ und C Basen von V. Ist $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq C$, so ist $w_1, \dots, w_k$ l.u. (nach Lemma 25 (iii)) und $k \leq n$ nach Satz 29. Also ist C endlich und $|C| \leq n = |B|$.

Aus Symmetriegründen ist auch $|B| \leq |C|$ und daher $|B| = |C|$.

<u>Definition:</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Besitzt V eine endliche Basis, so bezeichnet man die Anzahl der Elemente dieser (und damit jeder) Basis als die Dimension von V (über K) und schreibt dafür $\dim_K V$.

21.10.2024

<u>Beispiele:</u> 1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, da $\{e_1, e_2\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Basis ist.

2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, da $\{e_1, e_2, e_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Basis ist.

3) Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$, so ist $\dim_K K^n = n$, da $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis ist.

4) Ist K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}^+$, so ist $\dim_K K^{m \times n} = m \cdot n$.

Für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sei $E_{ij} = (\varepsilon_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}} \in K^{m \times n}$ definiert durch $\varepsilon_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{falls } (k,l) \neq (i,j) \end{cases}$

Für $m = n = 2$ ist also z.B. $E_{11} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Dann ist $B = \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von $K^{m \times n}$ (über K), denn:

Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{m \times n}$, so ist $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \in [B]$, d.h. $[B] = K^{m \times n}$, d.h. B ist Erzeugendensystem. B ist auch l.u., da $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0 \; (\in K^{m \times n})$ gleichbedeutend ist mit $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = 0$, d.h. $\alpha_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

5) $\dim_{\mathbb{R}} P_2 = 3$, da $\{p_0, p_1, p_2\}$ Basis ist.

6) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\dim_{\mathbb{R}} P_n = n+1$, da $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ Basis ist (mit $p_i(x) = x^i$ für $x \in \mathbb{R}$).

7) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$, da $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right\}$ Basis von $\mathbb{C}^2$ <u>über $\mathbb{R}$</u> ist.

Ist $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), so ist $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \in [B]$, d.h. $[B] = \mathbb{C}$. Ist $a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), so ist $\begin{pmatrix}a+bi\\c+di\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, also $a+bi = c+di = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$.

Bemerkung: Bsp. 7) zeigt, dass die Dimension $\dim_K V$ eines Vektorraums V vom Skalarkörper K abhängt. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ (Bsp. 3) aber $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ (Bsp. 7).

Korollar 31 Es sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\dim_K V = n$.

(i) Ist $B \subseteq V$ l.u., so gilt: B ist Basis von V $\iff |B| = n$,

(ii) Ist W Teilraum von V, so besitzt auch W eine endliche Basis, $\dim_K W \le \dim_K V$

und $\dim_K W = \dim_K V \iff W = V$.

Beweis. (i) ($\Rightarrow$) Ist B Basis von V, so ist $|B| = \dim_K V = n$.

($\Leftarrow$) Ist $|B| = n$, so ist auch $[B] = V$. (Angenommen, $\exists v \in V \setminus [B]$. Dann wäre $B \cup \{v\}$ l.u. Es sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ist $\alpha v + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = o$ und wäre $\alpha \neq 0$, so wäre $v = \sum_{i=1}^{n} (-\alpha^{-1}\alpha_i) v_i \in [B]$, Wid. Also ist $\alpha = 0$ und daher auch $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Das ist aber ein Widerspruch zu Satz 29 (i). Also gibt es kein $v \in V \setminus [B]$.)

(ii) Es sei $C \subseteq W$ eine l.u. Menge mit maximaler Anzahl von Elementen. Wegen Satz 29 (i) ist $|C| \le n$ und C ist endlich. Wie im Beweis der Implikation ($\Leftarrow$) in (i) zeigt man $[C] = W$. Also ist C Basis von W und

$\dim_K W = |C| \le n = \dim_K V$

($\Rightarrow$) Ist $\dim_K W = \dim_K V$ und B eine Basis von W, so ist B nach (i) auch Basis von V und daher $V = [B] = W$.

($\Leftarrow$) Aus $V = W$ folgt sofort $\dim_K V = \dim_K W$.

Bemerkung: Kor. 31 ermöglicht es, die Teilräume des $\mathbb{R}^2$ zu klassifizieren. Ist W ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$, so ist $\dim_{\mathbb{R}} W \le 2$, d.h. $\dim_{\mathbb{R}} W \in \{0,1,2\}$. Offenbar sind $\{\binom{0}{0}\}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ die einzigen Teilräume mit $\dim_{\mathbb{R}} W = 0$ bzw. $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$. Ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$ und $\{v\}$ Basis von W, so ist $v \neq o$ und $W = [v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade durch den Ursprung.

Ist W Teilraum des $\mathbb{R}^3$, so gilt analog $\dim_{\mathbb{R}} W \in \{0,1,2,3\}$. Dabei sind $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ und $\mathbb{R}^3$ die einzigen Teilräume mit $\dim_{\mathbb{R}} W = 0$ bzw. $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$. Ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$ und $\{v\}$ Basis von W, so ist $W = [v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ Gerade durch den Ursprung. Ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$ und $\{v, w\}$ Basis von W, so ist $W = [v, w] = \{sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ eine Ebene, die den Ursprung enthält.

Korollar 32 Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $M \subseteq V$ mit $[M] \neq \{o\}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\dim_K [M] = k$,

(ii) M enthält k l.u. Vektoren und k+1 Vektoren von M sind stets l.a.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Jede Basis von $[M]$ besteht aus k l.u. Vektoren. Sind $w_1, \dots, w_m \in [M]$ l.u., so gilt $m \leq k$ nach Satz 29 (i). Ist $m > k$, so sind $w_1, \dots, w_m \in [M]$ daher l.a.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es seien $v_1, \dots, v_k \in M$ l.u. Ist $w \in M \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$, so sind $v_1, \dots, v_k, w$ l.a. Daher ist $w \in [v_1, \dots, v_k]$. (Wäre $\alpha w + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = o$ nur für $\alpha = 0$ möglich, so wäre $w, v_1, \dots, v_k$ l.a.) Also ist $M \subseteq [v_1, \dots, v_k]$ und daher $[M] \subseteq [[v_1, \dots, v_k]] = [v_1, \dots, v_k]$. Da natürlich auch $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq M$ und daher $[v_1, \dots, v_k] \subseteq [M]$ ist $[v_1, \dots, v_k] = [M]$. Da $v_1, \dots, v_k$ auch l.u. ist, gilt $k = \dim_K [v_1, \dots, v_k] = \dim_K [M]$.