1.3 Vektorräume

<u>Def.:</u> Es sei $V \neq \emptyset$ eine Menge und K ein Körper. Weiters seien zwei Abbildungen $V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$ und $K \times V \to V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben

1) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h.

   1.1) $\forall u,v,w \in V: (u+v)+w = u+(v+w)$

   1.2) $\exists o \in V \; \forall v \in V: o+v = v+o = v$

   1.3) $\forall v \in V \; \exists -v \in V: v+(-v) = (-v)+v = o$

   1.4) $\forall v,w \in V: v+w = w+v$

2.1) $\forall \alpha, \beta \in K \; \forall v \in V: (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

2.2) $\forall \alpha \in K \; \forall v,w \in V: \alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

2.3) $\forall \alpha, \beta \in K \; \forall v \in V: (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

2.4) $\forall v \in V: 1 \cdot v = v$ (wobei $1 \in K$)

Dann heißt V Vektorraum über K oder kurz K-Vektorraum. Die Elemente von V werden Vektoren, die Elemente von K werden in diesem Zusammenhang Skalare genannt. K wird Skalarkörper des Vektorraums V genannt.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Ist $K = \mathbb{R}$ bzw $K = \mathbb{C}$, so wird V auch als reeller bzw. komplexer Vektorraum bezeichnet.

2) Man schreibt wieder $v - w := v + (-w)$ für $v, w \in V$.

3) Wir schreiben o für neutrale Element der Gruppe $(V,+)$. Es wird als Nullvektor bezeichnet.

4) Beachten Sie, dass $+$ und $\cdot$ in den Vektorraumaxiomen 2.1) – 2.4) jeweils zwei Bedeutungen haben.

<u>Beispiele:</u> 1) $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ (für $\alpha \in \mathbb{R}$) ist ein reeller Vektorraum: Wir wissen schon, dass $(\mathbb{R}^2,+)$ abelsche Gruppe ist (Seite 2).

– $(\alpha\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x \\ (\alpha\beta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x) \\ \alpha(\beta y) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} = \alpha \left(\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

– $\alpha \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+x_2) \\ \alpha(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

  für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

– $(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x \\ (\alpha+\beta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x \\ \alpha y + \beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

– $1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x \\ 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

2) $\mathbb{R}^3$ mit komponentenweiser Addition und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) ist reeller Vektorraum.

3) Für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ ist $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Addition und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) ein reeller Vektorraum.

4) Es sei $n \in \mathbb{N}^+$ und K ein Körper. Dann gilt allgemein: K^n mit komponentenweiser Addition und $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in K$) ist ein K-Vektorraum

Satz 19 Es sei $m, n \in \mathbb{N}^+$ und K ein Körper. Dann ist $K^{m \times n}$ mit der üblichen Summe von Matrizen (siehe p7) und $\alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ ein K-Vektorraum.

Beweis: Wir haben in Satz 11 bewiesen, dass $(K^{m \times n}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$$(\alpha\beta) \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \big((\alpha\beta) a_{ij}\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \big(\alpha(\beta a_{ij})\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \alpha \cdot (\beta a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$= \alpha \cdot \Big(\beta \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}\Big)$$

$$\alpha \cdot \Big((a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}\Big) = \alpha\, (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \big(\alpha(a_{ij} + b_{ij})\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$= (\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + (\alpha b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \alpha\, (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + \alpha\, (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \big((\alpha+\beta) a_{ij}\big)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (\alpha a_{ij} + \beta a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + (\beta a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$= \alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + \beta \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

$$1 \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (1 \cdot a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Bemerkung: Satz 19 enthält alle vorangegangenen Beispiele als Spezialfälle. 9.10.2024

Beispiele (Fortsetzung): 5) Es sei $\mathcal{F} = \{(a_n)_{n \ge 1} \mid a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \ge 1\}$ die Menge aller reellen Folgen, d.h. die Menge aller Abbildungen $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. Versieht man $\mathcal{F}$ mit den Verknüpfungen $(a_n)_{n \ge 1} + (b_n)_{n \ge 1} := (a_n + b_n)_{n \ge 1}$ und $\alpha \cdot (a_n)_{n \ge 1} = (\alpha a_n)_{n \ge 1}$, so ist $\mathcal{F}$ ein reeller Vektorraum.

6) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ ein Intervall. Dann ist $\mathbb{R}^I = \{f \mid f: I \to \mathbb{R}$ ist Funktion$\}$ mit $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$ (mit $f, g \in \mathbb{R}^I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in I$) ein reeller Vektorraum.

7) Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und K ein Körper. Dann ist $K^M = \{f \mid f: M \to K$ Funktion$\}$ mit $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$ (mit $f, g \in K^M$, $\alpha \in K$, $x \in M$) ein K-Vektorraum

Bemerkung: Bsp. 7) enthält Satz 19 und alle vorangegangenen Beispiele als Spezialfälle.

Beispiele (Fortsetzung): 8) Es sei $n \in \mathbb{N}^+$. Dann ist $\mathbb{C}^n$ mit komponentenweiser Addition und $\alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$) ein reeller Vektorraum

9) Es sei L/K eine Körpererweiterung (d.h. K und L sind Körper und K ist Teilkörper von L). Dann ist L ein K-Vektorraum.

Lemma 20 Es sei V ein K-Vektorraum.

(i) $0 \cdot v = \sigma \quad \forall v \in V$,

(ii) $\alpha \cdot \sigma = \sigma \quad \forall \alpha \in K$,

(iii) Aus $\alpha \cdot v = \sigma$ (mit $\alpha \in K, v \in V$) folgt, dass $\alpha = 0$ oder $v = \sigma$,

(iv) $(-1)v = -v \quad \forall v \in V$.

Beweis: (i) Aus $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$ folgt durch Addition von $-(0 \cdot v)$, dass

$$\sigma = 0 \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v$$

(ii) Aus $\alpha \cdot \sigma = \alpha \cdot (\sigma + \sigma) = \alpha \cdot \sigma + \alpha \cdot \sigma$ folgt durch Addition von $-(\alpha \cdot \sigma)$, dass

$$\sigma = \alpha \cdot \sigma - \alpha \cdot \sigma = \alpha \cdot \sigma + \alpha \cdot \sigma - \alpha \cdot \sigma = \alpha \cdot \sigma$$

(iii) Es sei $\alpha \cdot v = \sigma$. Falls $\alpha = 0$ fertig. Falls $\alpha \neq 0$, so

$$v = 1 \cdot v = (\alpha^{-1}\alpha) v = \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}\sigma \overset{(ii)}{=} \sigma$$

(iv) $v + (-1)v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v \overset{(i)}{=} \sigma$. Die Beh. folgt aus Lemma 1(ii).

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$ heißt Teilraum von V, wenn W bezüglich der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von V selbst ein K-Vektorraum ist.

Satz 21 Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) W ist Teilraum von V,

(ii) $\forall v, w \in W: v + w \in W$ und $\forall \alpha \in K \; \forall v \in W: \alpha v \in W$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Folgt aus der Abgeschlossenheit von W

(ii) $\Rightarrow$ (i) Assoziativität der Addition von Vektoren aus W (d.h. $(u+v)+w = u+(v+w) \;\; \forall u,v,w \in W$) gilt, da sie sogar für alle Vektoren in V gilt.

Für $v \in W$ ist nach Lemma 20 (iv) und der Voraussetzung auch $-v = (-1)v \in W$.

Da $W \neq \emptyset$ existiert ein $v \in W$. Dann ist auch $-v \in W$ und daher nach Voraussetzung auch $\sigma = v + (-v) \in W$.

Kommutativität der Addition von Vektoren aus W (d.h. $v + w = w + v \;\; \forall v, w \in V$) gilt, da sie sogar für alle Vektoren in V gilt.

Damit ist gezeigt, dass $(W, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

Die Vektorraumaxiome 2.1) bis 2.4) gelten wieder, da sie sogar auf ganz V gelten.

Bspe.: 1) Jeder K-Vektorraum V enthält als Teilräume $\{\sigma\}$ und V.

2) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $a, b \in \mathbb{R}$, nicht beide $= 0$. Dann ist $W := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \right\}$ ein Teilraum von V, denn: $\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2} \in W \Rightarrow ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = 0$

$\Rightarrow a(x_1+x_2) + b(y_1+y_2) = (ax_1+by_1) + (ax_2+by_2) = 0 \Rightarrow \binom{x_1}{y_1} + \binom{x_2}{y_2} = \binom{x_1+x_2}{y_1+y_2} \in W$

$\binom{x}{y} \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow ax + by = 0 \Rightarrow a(\alpha x) + b(\alpha y) = \alpha(ax+by) = 0 \Rightarrow \alpha \binom{x}{y} = \binom{\alpha x}{\alpha y} \in W$

3) Bspe 1) und 2) zeigen, dass $\left\{\binom{0}{0}\right\}$, $\mathbb{R}^2$ und Geraden durch den Ursprung Teilräume des $\mathbb{R}^2$ sind.

4) Ist $V = \mathbb{R}^3$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$, so ist $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \right\}$ Teilraum von V. (Ist $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist W eine Ebene, die den Ursprung enthält. Ist $a = b = c = 0$, so ist $W = \mathbb{R}^3$.)

5) Ist $V = \mathbb{R}^3$ und $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, so ist $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = dx + ey + fz = 0 \right\}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. (Dabei kann W eine Ebene, die den Ursprung enthält, eine Gerade, die durch den Ursprung geht oder ganz $\mathbb{R}^3$ sein.)

6) Es sei $m, n \in \mathbb{N}^+$, K ein Körper, $V = K^n$ und $A \in K^{m \times n}$. Dann ist $W = \{x \in K^n \mid A \cdot x = \sigma\}$ ein Teilraum von V. (Sind $x, y \in W$, so $A \cdot (x+y) = A \cdot x + A \cdot y = \sigma + \sigma = 0 \Rightarrow x + y \in W$. Ist $\alpha \in K$ und $x \in W$, so ist $A \cdot (\alpha x) = \alpha(A \cdot x) = \alpha \cdot \sigma = \sigma \Rightarrow \alpha x \in W$.)

Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, so ist

$$A \cdot x = \sigma \iff \left. \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \right\}$$

D.h. die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems (mit m Gleichungen und n Unbekannten) sind ein Teilraum des K^n. Dieses Bsp. enthält alle bisherigen.

7) Es seien $\mathcal{F}_b$ die Menge aller beschränkten reellen Folgen, $\mathcal{F}_k$ die Menge aller konvergenten reellen Folgen und $\mathcal{F}_n$ die Menge aller reellen Nullfolgen. Dann sind $\mathcal{F}_b$, $\mathcal{F}_k$ und $\mathcal{F}_n$ Teilräume von $\mathcal{F}$ (und $\mathcal{F}_n \subsetneqq \mathcal{F}_k \subsetneqq \mathcal{F}_b \subsetneqq \mathcal{F}$ nach Resultaten der Analysis).

8) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall positiver Länge, $B(I)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $I \to \mathbb{R}$, $C(I)$ die Menge aller stetigen Funktionen $I \to \mathbb{R}$ und $C^\infty(I)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$. Dann sind $B(I)$, $C(I)$ und $C^\infty(I)$ Teilräume von $\mathbb{R}^I$. (Nach Resultaten der Analysis gelten $C^\infty(I) \subsetneqq C(I) \subsetneqq \mathbb{R}^I$ und $B(I) \subsetneqq \mathbb{R}^I$. Ist $I = [a, b]$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall, so gilt auch $C(I) \subsetneqq B(I)$.)

9) Es sei $P = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ ist Polynomfunktion}\}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n := \{p \in P \mid \operatorname{grad} p \le n\}$. Dann sind P und P_n $\forall n \in \mathbb{N}$ Teilräume von $C^\infty(\mathbb{R})$, wobei $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq P_2 \subsetneqq \dots \subsetneqq P \subsetneqq C^\infty(\mathbb{R})$.

<u>Satz 22</u> Es sei V ein K-Vektorraum und $W_1, \dots, W_n$ Teilräume von V. Dann ist auch $\bigcap_{i=1}^{n} W_i = W_1 \cap \dots \cap W_n$ ein Teilraum von V.

Beweis: $v,w \in \bigcap_{i=1}^n W_i \Rightarrow v,w \in W_i$ für $1 \le i \le n \Rightarrow v+w \in W_i$ für $1 \le i \le n \Rightarrow v+w \in \bigcap_{i=1}^n W_i$

$\alpha \in K, v \in \bigcap_{i=1}^n W_i \Rightarrow v \in W_i$ für $1 \le i \le n \Rightarrow \alpha v \in W_i$ für $1 \le i \le n \Rightarrow \alpha v \in \bigcap_{i=1}^n W_i$ 14.10.2024

Bspe.: 1) Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \ne \mu$, $U = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \lambda x \right\}$ und $W = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \mu x \right\}$

Dann sind U und W Teilräume des $\mathbb{R}^2$ (da $U = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda x - y = 0 \right\}$ und $W = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mu x - y \right\}$)

und $U \cap W = \left\{ \binom{0}{0} \right\}$. (Ist $\binom{x}{y} \in U \cap W$, so $\lambda x = y = \mu x \Rightarrow (\lambda - \mu) x = 0$. Da $\lambda - \mu \ne 0$ folgt $x = 0$ und daher $y = \lambda \cdot 0 = 0$.)

2) Es seien $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z = 0 \right\}$ und $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = z \right\}$. Dann sind U und W

Teilräume des $\mathbb{R}^3$ und $U \cap W = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$. Wegen $t - 2t + t = 0$ und $t = t$ gilt

$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq U \cap W$. Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \cap W$, so $x = z$ und $0 = x + y + z = 2x + y$ und daher $y = -2x$.

Daher ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \in \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ und somit $U \cap W \subseteq \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Def.: Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Ein $v \in V$, das die Gestalt $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ (für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$) besitzt, heißt Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. Ist $M \subseteq V$, $M \ne \emptyset$, so heißt $v \in V$ Linearkombination von Vektoren aus M, wenn es $v_1, \dots, v_n \in M$ gibt, derart dass v Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ ist.

Def.: Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$, $M \ne \emptyset$. Dann heißt

$[M] = \{ v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } M \} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \,\middle|\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, v_1, \dots, v_n \in M \right\}$

der von M erzeugte Teilraum (oder der von M aufgespannte Teilraum oder die lineare Hülle von M).

Zusätzlich sei $[\emptyset] = \{ 0 \}$.

Bemerkung: Ist $M = \{ v_1, \dots, v_n \}$ endlich, so schreibt man auch $[v_1, \dots, v_n]$ für $[M]$.

Satz 23 Es sei V ein K-Vektorraum von $M \subseteq V$. Dann ist $[M]$ Teilraum von V.

Beweis: Sei zunächst $M \ne \emptyset$. Ist $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \in [M]$ (mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$ und $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in M$), so ist auch $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \in [M]$ und

$\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) v_i \in [M]$. Ist $M = \emptyset$, so ist $[\emptyset] = \{ 0 \}$ ebenfalls Teilraum

Bemerkungen: 1) $W_1 \cap \dots \cap W_n$ ist der größte Teilraum von V, der in allen Teilräumen $W_1, \dots, W_n$ enthalten ist

2) $[M]$ ist der kleinste Teilraum von V, der M enthält.

Lemma 24 Es sei V ein K-Vektorraum und $M, N \subseteq V$.

(i) $M \subseteq [M]$,

(ii) M ist genau dann Teilraum von V, wenn $[M] = M$,

(iii) $[[M]] = [M]$,

(iv) Aus $M \subseteq N$ folgt $[M] \subseteq [N]$

<u>Beweis</u>: (i) Ist $M \neq \emptyset$ und $v \in M$, so $v = 1 \cdot v \in [M]$. Ist $M = \emptyset$, so $M = \emptyset \subseteq \{o\} = [M]$.

(ii) ($\Rightarrow$) Ist M Teilraum, so ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in M$ $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ $\forall v_1, \dots, v_n \in M$ (wegen Satz 21).

Daher ist $[M] \subseteq M$. Da $M \subseteq [M]$ nach (i) immer gilt, folgt $[M] = M$.

($\Leftarrow$) Folgt daraus, dass $[M]$ Teilraum ist.

(iii) Folgt aus (ii) weil $[M]$ stets Teilraum ist

(iv) Nach Voraussetzung und (i) ist $M \subseteq N \subseteq [N]$. Da $[N]$ Teilraum ist, ist $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in [N]$

für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in M$, also $[M] \subseteq [N]$

<u>Beispiele</u>: 1) Ist $v \in \mathbb{R}^2$, so ist $[v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ (nach Def.). Ist $v = \binom{0}{0}$, so ist $[v] = [o] = \left\{\binom{0}{0}\right\}$

Ist $v \neq o$, so ist $[v]$ eine Gerade durch den Ursprung.

2) Analog gilt: Ist $v \in \mathbb{R}^3$, so ist $[v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, wobei $[v] = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ falls $v = o$ und $[v]$ ist eine Gerade durch den Ursprung falls $v \neq o$.

3) Es sei $v = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wir zeigen $[v, w] = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - 6z = 0\right\}$.

Nach Definition ist $[v, w] = \{sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \left\{s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}s+2t\\3s\\s+t\end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R}\right\}$

Da $3(s+2t) + 3s - 6(s+t) = 0$ ist $[v, w] \subseteq \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - 6z = 0\right\}$.

Ist umgekehrt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $3x + y - 6z = 0$, so sei $s := \frac{1}{3}y$ und $t := \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y$. Dann ist

$$s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}y\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y\right)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y/3\\y\\y/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x - y/3\\0\\x/2 - y/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\x/2 + y/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

D.h. es gilt auch $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - 6z = 0\right\} \subseteq [v, w]$.

<u>Bemerkung</u>: Ist V ein K-Vektorraum und U und W zwei Teilräume von V, so ist $U \cup W$ im allgemeinen kein Teilraum von V. Es sei z.B. $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = 0\right\} = \left[\binom{1}{0}\right]$ und $W = \left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = 0\right\} = \left[\binom{0}{1}\right]$. Wäre $U \cup W$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$, so wäre $\binom{1}{1} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} \in U \cup W$, was offensichtlich falsch ist.