1.2 Matrizen

Def.: Es seien $m,n \in \mathbb{N}^+$ und K ein Körper. Unter einer $m\times n$-Matrix A (über K) versteht man „ein rechteckiges Schema von Zahlen" $a_{ij} \in K$ (mit $1\le i\le m$, $1\le j\le n$) der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Menge aller $m\times n$-Matrizen über K bezeichnen wir mit $K^{m\times n}$.

Bspe.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 5 & 7 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}, \quad \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 27i & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e \\ \pi & e^{\pi\sqrt{163}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Bemerkungen: 1) Formal sauberer (aber weniger anschaulich) kann man eine $m\times n$-Matrix als eine Abbildung $\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \to K$, $(i,j)\mapsto a_{ij}$ definieren.

2) Für $n=1$ erhält man als Spezialfall Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix} \in K^{m\times 1}$ und für $m=1$ Zeilenvektoren $(a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}) \in K^{1\times n}$.

Def.: Es sei K ein Körper. Für zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$ definiert man ihre Summe als $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Bsp.: $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Satz 11 Es sei K ein Körper und $m,n \in \mathbb{N}^+$. Dann ist $(K^{m\times n}, +)$ eine abelsche Gruppe.

Beweis: Abgeschlossenheit ist klar

$$\left((a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\right) + (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \left((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

$$= \left(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + \left((b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\right)$$

Neutrales Element ist die Nullmatrix $O = (0)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, bei der alle Eintragungen $0 \in K$ sind.

Inverses Element zu $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ ist $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (b_{ij}+a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

Def.: Es sei K ein Körper und $m,n \in \mathbb{N}^+$. Der Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

ordnet man die transponierte Matrix

$$A^T = (a_{ij})_{\substack{1\le j\le n\\1\le i\le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{n\times m}$$

zu.

Bsp $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

Bemerkungen: 1) Transponieren ist eine Abbildung $K^{m\times n} \to K^{n\times m}$, $A \mapsto A^T$

2) Es gelten $(A^T)^T = A$ und $(A+B)^T = A^T + B^T$ (ohne Beweis)

3) Transponieren führt Zeilen- in Spaltenvektoren über und umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1 \cdots a_n), \quad (a_1 \cdots a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Def.: Es sei K ein Körper und $m,n,l \in \mathbb{N}^+$. Zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le l}} \in K^{n\times l}$ ordnet man ihr Produkt $A\cdot B = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}} \in K^{m\times l}$ zu, wobei

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ ist (für $1\le i\le m$, $1\le k\le l$), d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \;\cdots\; a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix} \in K^{m\times l}$$

Bspe.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Bemerkungen: 1) Matrizenmultiplikation ist eine Abbildung $K^{m\times n} \times K^{n\times l} \to K^{m\times l}$, $(A,B) \mapsto A\cdot B$.

2) Hat man nicht viel Übung, so hilft es, die Matrizen so aufzuschreiben:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1k}} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nk}} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \cdots a_{in}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bsp.: $(1\ 2\ 3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} = 16 \in \mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$ aber $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\cdot(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\5&10&15\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Satz 12 Es sei K ein Körper, $m,n,r,s \in \mathbb{N}^+$, $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ und $C \in K^{r\times s}$.
Dann ist $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

Beweis: Es sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le r}}$ und $C = (c_{kl})_{\substack{1\le k\le r\\1\le l\le s}}$. Dann ist

$$A\cdot B = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le r}} \quad \text{und} \quad B\cdot C = \Big(\sum_{k=1}^{r} b_{jk}c_{kl}\Big)_{\substack{1\le j\le n\\1\le l\le s}} \quad \text{und daher}$$

$$(A\cdot B)\cdot C = \Big(\sum_{k=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)c_{kl}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}} = \Big(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}}$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{ij}b_{jk}c_{kl}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}} = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{r} b_{jk}c_{kl}\Big)\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}} = A\cdot(B\cdot C)$$

Satz 13 Es sei K ein Körper und $m,n,l \in \mathbb{N}^+$

(i) Ist $A \in K^{m\times n}$ und $B, C \in K^{n\times l}$, so ist $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$,

(ii) Ist $A, B \in K^{m\times n}$ und $C \in K^{n\times l}$, so ist $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

Beweis: (i) Es seien $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le l}}$ und $C = (c_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le l}}$. Dann ist

$$A\cdot(B+C) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}} = \Big(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}+a_{ij}c_{jk})\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}}$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}} = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}} + \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}\Big)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}} = A\cdot B + A\cdot C$$

(ii) Übung

Def.: Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $a_{ij} = 0$ falls $i \ne j$ heißt Diagonalmatrix.

D.h. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$, wobei die 0 anzeigen, dass alle Eintragungen in diesem Bereich $0 (\in K)$ sind. 8.10.2024

Die spezielle Diagonalmatrix $I_n := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$ heißt Einheitsmatrix

Satz 14: Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}^+$ und $A \in K^{m \times n}$. Dann ist $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$.

Beweis: Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, so ist

$$A \cdot I_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Die zweite Behauptung zeigt man analog

Korollar 15 Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Dann ist $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ein Ring mit 1, der für $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

Beweis: $(K^{n \times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe nach Satz 11. Assoziativität der Multiplikation folgt aus Satz 12 und Gültigkeit der Distributivgesetze aus Satz 13. Nach Satz 14 ist $I_n \in K^{n \times n}$ Einselement. Aus

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Für $n = 1$ ist $(K^{1 \times 1}, +, \cdot) = (K, +, \cdot)$ ein Körper.

Def.: Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt invertierbar (oder nichtsingulär), wenn sie als Element des Rings $(K^{n \times n}, +, \cdot)$ invertierbar ist, d.h. wenn $\exists A^{-1} \in K^{n \times n} : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Def.: Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Die Menge $GL_n(K) = \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ wird General Linear Group genannt.

Korollar 16 Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^+$. Dann ist $(GL_n(K), \cdot)$ eine Gruppe.

Beweis: Folgt sofort aus Lemma 10.

Bemerkungen: 1) Für $n \geq 2$ besitzt nicht jede Matrix $\neq 0$ (Nullmatrix) in $K^{n \times n}$ ein Inverses. Ist z.B. $S \in K^{n \times n}$ mit

$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$ bel., so ist $S \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq I_n$

2) Für $n \geq 2$ ist die Gruppe $GL_n(K)$ nicht abelsch (Übung).

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ wobei $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Satz 17 Es sei K ein Körper, $m,n,l \in \mathbb{N}^+$, $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times l}$. Dann ist $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Beweis: Sind $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le l}}$, so ist $A\cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le l}}$,

$A^T = (a_{ij})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le m}}$ und $B^T = (b_{jk})_{\substack{1\le k\le l\\ 1\le j\le n}}$ und daher

$$(A\cdot B)^T = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{\substack{1\le k\le l\\ 1\le i\le m}} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij}\right)_{\substack{1\le k\le l\\ 1\le i\le m}} = B^T \cdot A^T$$

Korollar 18 Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}^+$ und $A \in K^{n\times n}$. Ist A invertierbar, so ist auch A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: Aus $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$ folgt $(A\cdot A^{-1})^T = (A^{-1}\cdot A)^T = I_n^T = I_n$ und daher (wegen Satz 17) $(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I_n$. Daraus folgt die Beh.