1.10 Ein kurzer Einschub über quadratische Formen

<u>Definition</u>: Eine Abbildung $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_i x_j$ mit $c_{ij} \in \mathbb{R}$ (für $1 \le i,j \le k$) wird quadratische Form genannt.

<u>Lemma 117</u> Ist $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form, so gibt es eine (eindeutig bestimmte) symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, sodass

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x} = \langle \underline{x}, A \cdot \underline{x} \rangle = (x_1 \dots x_k) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} a_{ij} x_i x_j .$$

Umgekehrt wird durch jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ auf diese Weise eine quadratische Form definiert.

<u>Beweis</u>: $$q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \le j < i \le k} c_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ji} x_j x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le k} (c_{ij} + c_{ji}) x_i x_j = \sum_{i=1}^{k} c_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le k} \tfrac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) x_i x_j$$

Setzt man $a_{ii} = c_{ii}$ (für $1 \le i \le k$) und $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji})$ (für $1 \le i,j \le k$ und $i \ne j$), so erhält man die gesuchte Darstellung (die offenbar eindeutig ist).

<u>Beispiel</u>: Ist $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = 2x^2 - 4xy + 6xz + 2yz$, so ist

$$q(x,y,z) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Definition</u>: Es sei $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ symmetrisch. Die quadratische Form $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$ bzw. A heißen

- positiv definit, wenn $q(\underline{x}) > 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$,
- positiv semidefinit, wenn $q(\underline{x}) \ge 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $\exists \underline{y} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}: q(\underline{y}) = 0$,
- negativ definit, wenn $q(\underline{x}) < 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$,
- negativ semidefinit, wenn $q(\underline{x}) \le 0 \ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $\exists \underline{y} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}: q(\underline{y}) = 0$,
- indefinit, wenn $\exists \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^k$, sodass $q(\underline{x}) < 0 < q(\underline{y})$.

<u>Beispiele</u>: 1) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 + y^2$ ist positiv definit.

2) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ ist positiv semidefinit, da $q(x,y) = (x+y)^2 \ge 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $q(1,-1) = 0$.

3) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = -x^2 - y^2$ ist negativ definit, da $-q(x,y) = x^2 + y^2$ positiv definit ist

4) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = -x^2 - 2xy - y^2$ ist negativ semidefinit, da $-q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ positiv semidefinit ist.

5) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 - y^2$ ist indefinit, da $q(0,1) = -1 < 0 < 1 = q(1,0)$.

6) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = xy$ ist indefinit, da $q(1,-1) = -1 < 0 < 1 = q(1,1)$.

7) $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ ist indefinit, da $q(0,1) = -1 < 0 < 1 = q(1,0)$.

<u>Definition</u>: Wir schreiben $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für (binäre) quadratische Formen $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und setzen dafür $\Delta := \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$.

<u>Satz 118</u> Es sei $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine quadratische Form.

(i) q ist positiv definit $\iff$ $a > 0$ und $\Delta > 0$,

(ii) q ist negativ definit $\iff$ $a < 0$ und $\Delta > 0$,

(iii) q ist (positiv oder negativ) definit $\iff$ $\Delta > 0$.

<u>Beweis</u>: (i) ($\Rightarrow$) $0 < q(1,0) = a$ und aus $0 < q(-b,a) = ab^2 - 2ab^2 + ca^2 = -ab^2 + ca^2 = a(ac - b^2) = a\Delta$ folgt $\Delta > 0$.

($\Leftarrow$) Da $a > 0$ folgt $q(x,y) = \frac{1}{a}\left((ax+by)^2 + (ac-b^2)y^2\right) = \frac{1}{a}\left((ax+by)^2 + \Delta y^2\right) \geq 0$ und $q(x,y) = 0 \Rightarrow ax + by = y = 0 \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0$, also $(x,y) = (0,0)$.

(ii) q negativ definit $\iff$ $-q$ positiv definit $\iff$ $-a > 0$ und $(-a)(-c) - (-b)^2 > 0$ $\iff$ $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$

(iii) Folgt aus (i) und (ii), da aus $\Delta > 0$ folgt, dass $a \neq 0$. (Aus $a = 0$ folgt ja $\Delta = -b^2 \leq 0$.)

<u>Bemerkung</u>: Wir skizzieren im folgenden kurz, wie man Satz 118 (i) und (ii) für quadratische Formen $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ verallgemeinern kann.

<u>Definition</u>: Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $1 \leq l \leq k$. Man bezeichnet

$$\Delta_l := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}$$

als den l-ten Hauptminor von A,

d.h. $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\ldots$, $\Delta_k = \det A$.

<u>Satz 119</u> Es sei $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ symmetrisch. Äquivalent sind:

(i) Die Matrix A (bzw. die quadratische Form $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$) ist positiv definit,

(ii) Alle Hauptminoren von A sind positiv, d.h. $\Delta_i > 0$ für $1 \leq i \leq k$.

Ohne <u>Beweis</u>

Korollar 120 Es sei $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ symmetrisch. Äquivalent sind:

(i) Die Matrix A (bzw. die quadratische Form $q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $q(\underline{x}) = \underline{x}^T \cdot A \cdot \underline{x}$) ist negativ definit,

(ii) Die Hauptminoren von A erfüllen die Relation $\operatorname{sgn} \Delta_i = (-1)^i$ für $1 \le i \le k$, d.h. $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \operatorname{sgn} \Delta_k = (-1)^k$.

Beweis: Übung

Beispiel Es sei $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 4yz + 5z^2 = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Da $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$ und $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 - 5 = 1 > 0$, ist q nach Satz 119 positiv definit.

Satz 121 Es sei $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine quadratische Form. Äquivalent sind:

(i) q ist indefinit,

(ii) $\Delta < 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Aus $a = b = c = 0$ folgt $q = 0$, ein Widerspruch.
Ist $a = c = 0$, so muss daher $b \neq 0$ und $\Delta = -b^2 < 0$ gelten.
Ist $a \neq 0$, so ist $q(x,y) = \frac{1}{a}\left((ax+by)^2 + \Delta y^2\right)$. Wäre $\Delta \ge 0$, so wäre $q(x,y) \ge 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ falls $a > 0$ bzw. $q(x,y) \le 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ falls $a < 0$, ein Widerspruch. Also ist $\Delta < 0$.
Ist $c \neq 0$, so ist $q(x,y) = \frac{1}{c}\left((ac - b^2)x^2 + (bx+cy)^2\right) = \frac{1}{c}\left(\Delta x^2 + (bx+cy)^2\right)$ und $\Delta < 0$ folgt analog.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Aus $a = b = c = 0$ folgt $\Delta = 0$, ein Widerspruch.
Ist $a = c = 0$, so muss $b \neq 0$ gelten und $q(x,y) = 2bxy$ ist indefinit, da $q(1,1) = 2b$ und $q(1,-1) = -2b$ verschiedenes Vorzeichen haben.
Ist $a \neq 0$, so haben $q(1,0) = a$ und $q(-b,a) = a\Delta$ verschiedenes Vorzeichen.
Ist $c \neq 0$, so haben $q(0,1) = c$ und $q(c,-b) = c\Delta$ verschiedenes Vorzeichen.

Korollar 122 Es sei $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine quadratische Form. Äquivalent sind:

(i) q ist (positiv oder negativ) semidefinit,

(ii) $\Delta = 0$.

13.1.2025

Beweis: Folgt aus Satz 118 (iii) und Satz 121.