9. Geraden in der Ebene

Definition: Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Gerade, wenn es $a \in \mathbb{R}^2$ und $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt, sodass $G = \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\} = a + \mathbb{R}v$. Wir schreiben dafür $G_{a,v} := a + \mathbb{R}v$.

Bemerkung: Geraden sind in der Vorlesung bereits mehrmals aufgetreten. Es entsteht aber kein Problem dadurch, dass sie erst jetzt „offiziell" eingeführt werden.

Satz 93 Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $G_{a,v} = G_{b,w}$,

(ii) $G_{a,v} \subseteq G_{b,w}$,

(iii) $b \in G_{a,v}$ und $\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = cv$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Trivial

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $G_{a,v} \subseteq G_{b,w} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ \exists s \in \mathbb{R} : a + tv = b + sw$. Für $t = 0$ bzw. $t = 1$ erhält man daraus: $\exists s_0 \in \mathbb{R} : a = b + s_0 w$ (und daher $b = a - s_0 w$) und $\exists s_1 \in \mathbb{R} : a + v = b + s_1 w$ (und daher $a + v = a + (s_1 - s_0) w$). Dabei ist $s_0 \neq s_1$, da $s_0 = s_1 \Rightarrow a = b + s_0 w = b + s_1 w = a + v \Rightarrow v = 0$, Wid. Also ist $v = (s_1 - s_0) w$ und $w = \frac{1}{s_1 - s_0} v$. Weiters ist $b = a - s_0 w = a + \frac{s_0}{s_0 - s_1} v \in G_{a,v}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Aus $b \in G_{a,v}$ folgt: $\exists t_0 \in \mathbb{R} : b = a + t_0 v$ und daher

$$G_{a,v} = a + \mathbb{R}v = (b - t_0 v) + \mathbb{R}v = \{b + (t - t_0) v \mid t \in \mathbb{R}\} = \{b + \tfrac{t - t_0}{c} w \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{b + sw \mid s \in \mathbb{R}\} = G_{b,w}.$$

Definition Es sei $x \in \mathbb{R}^2$ und $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Man sagt, x liegt auf G oder G geht durch x wenn $x \in G$.

Satz 94 Es seien $p, q \in \mathbb{R}^2$ und $p \neq q$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade G, die durch p und q geht (d.h. $p, q \in G$). Und zwar gilt

$$G = G_{p,q-p} = \{(1-t)p + tq \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\alpha p + \beta q \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

Beweis: Existenz: $p, q \in G_{p,q-p}$, da $p = p + 0 \cdot (q - p)$ und $q = p + 1 \cdot (q - p)$

Eindeutigkeit: Es sei $G = G_{a,v} = a + \mathbb{R}v$ eine Gerade mit $p, q \in G$. Dann $\exists s, t \in \mathbb{R} : p = a + sv$ und $q = a + tv$, wobei $s \neq t$, da $s = t \Rightarrow p = a + sv = a + tv = q$, Wid.

Daher $q - p = (t - s) v$ und $v = \frac{1}{t-s}(q - p)$. Aus Satz 93 folgt

$$G_{a,v} = G_{p,q-p} = \{p + t(q-p) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t)p + tq \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\alpha p + \beta q \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1\}.$$

Bemerkung: Satz 94 besagt, dass eine Gerade durch zwei (verschiedene) auf ihr liegende Punkte eindeutig bestimmt ist.

Bsp.: Sind $p = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, so ist die Gerade durch p und q gegeben durch $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\left(\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}$.

Korollar 95 Es seien $p, q, r \in \mathbb{R}^2$. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $p, q, r \in G$,

(ii) Es gibt $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, nicht alle $= 0$, sodass $\alpha p + \beta q + \gamma r = 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Falls $p = q$ setze $\alpha = 1$, $\beta = -1$ und $\gamma = 0$. Falls $p \neq q$, so $r \in G_{p, q-p}$ und $\exists t \in \mathbb{R} : r = p + t(q-p) \Rightarrow (1-t)p + tq - r = 0$, d.h. setze $\alpha = 1-t$, $\beta = t$ und $\gamma = -1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist o.B.d.A $\gamma \neq 0$, so ist $r = -\frac{\alpha}{\gamma}p - \frac{\beta}{\gamma}q$, wobei $-\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{-\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} = 1$.

Nach Satz 94 liegt r daher auf der Gerade durch p und q.

Notation: Ist $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so sei $x^\perp := R_{\pi/2} \cdot x = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$.

Bemerkung: Offenbar ist $\langle x, x^\perp\rangle = 0$ und $\|x^\perp\| = \|x\|$.

Lemma 96 Ist $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so ist $\{v, v^\perp\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Beweis Wir zeigen, dass $v, v^\perp$ l.u. sind. Ist $v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$, so ist $\alpha\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-v_2\\v_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ äquivalent zu $\begin{pmatrix}v_1 & -v_2\\v_2 & v_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Da $\begin{vmatrix}v_1 & -v_2\\v_2 & v_1\end{vmatrix} = v_1^2 + v_2^2 > 0$, ist $\begin{pmatrix}v_1 & -v_2\\v_2 & v_1\end{pmatrix}$ invertierbar (nach Satz 27) und $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1 & -v_2\\v_2 & v_1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Die Beh. folgt aus Satz 16 (ii).

Satz 97 Ist $G_{a,v} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade, so ist $G_{a,v} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v^\perp\rangle = \langle a, v^\perp\rangle\}$.

Beweis: Ist $x \in G_{a,v}$, so $\exists t \in \mathbb{R} : x = a + tv$ und $x - a = tv$. Daraus folgt $\langle x, v^\perp\rangle - \langle a, v^\perp\rangle = \langle x - a, v^\perp\rangle = \langle tv, v^\perp\rangle = t\langle v, v^\perp\rangle = 0$, d.h.

$G_{a,v} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v^\perp\rangle = \langle a, v^\perp\rangle\}$.

Ist umgekehrt $\langle x, v^\perp\rangle = \langle a, v^\perp\rangle$, so folgt $\langle x - a, v^\perp\rangle = \langle x, v^\perp\rangle - \langle a, v^\perp\rangle = 0$.

Da $\{v, v^\perp\}$ nach Lemma 96 eine Basis ist, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : x - a = \alpha v + \beta v^\perp$ und daher

$0 = \langle x - a, v^\perp\rangle = \langle \alpha v + \beta v^\perp, v^\perp\rangle = \alpha\langle v, v^\perp\rangle + \beta\langle v^\perp, v^\perp\rangle = \beta\langle v^\perp, v^\perp\rangle$

Da $v^\perp \neq 0$ folgt $\beta = 0$ und $x - a = \alpha v$, d.h. $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v^\perp\rangle = \langle a, v^\perp\rangle\} \subseteq G_{a,v}$.

Bemerkung: Satz 97 besagt, dass jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ beschrieben werden kann als eine Menge $G = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma\right\}$, wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2$ und α, β nicht beide $= 0$ sind.

Bsp.: $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 4\right\}$ da $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und

$x_1 + x_2 = \left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 4$.

Bemerkung: Sind $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$, so ist die Gleichung der Gerade durch p und q gegeben durch $\langle x, (q-p)^\perp\rangle = \langle p, (q-p)^\perp\rangle$.

Bsp.: Sucht man die Gerade durch die Punkte $\binom{4}{1}$ und $\binom{2}{-2}$, so ist $\binom{2}{-2} - \binom{4}{1} = \binom{-2}{-3}$ und $3x_1 - 2x_2 = \left\langle \binom{x_1}{x_2}, \binom{3}{-2} \right\rangle = \left\langle \binom{4}{1}, \binom{3}{-2} \right\rangle = 10$ ist Gleichung der gesuchten Geraden.

21.5.2024

Bemerkung: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade, die zu keiner der beiden Koordinatenachsen parallel ist und hat G Schnittpunkte $\binom{a}{0}$ und $\binom{0}{b}$ (mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$) mit diesen beiden Achsen, so ist die Gleichung der Geraden durch $\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$ gegeben.
(Offensichtlich erfüllen $\binom{a}{0}$ und $\binom{0}{b}$ beide diese Gleichung. Da eine Gerade durch zwei auf ihr liegende Punkte eindeutig bestimmt ist, hat man die Gleichung gefunden.)

Bsp.: Auf der Geraden $\left\{ \binom{3}{2} + t\binom{1}{-2} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ liegen die Punkte $\binom{4}{0}$ und $\binom{0}{8}$ (für $t=1$ bzw $t=-3$). Ihre Gleichung ist daher $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} = 1$, dh $2x_1 + x_2 = 8$.

Definition: Zwei Geraden $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ heißen parallel wenn $G_1 = G_2$ oder $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ (dh G_1 und G_2 haben keinen Schnittpunkt). Wir schreiben dafür $G_1 \parallel G_2$ (bzw. $G_1 \nparallel G_2$ wenn G_1 und G_2 nicht parallel sind).

Notation: Sind $x = \binom{x_1}{x_2}, y = \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2$, so schreiben wir $\det(x,y) := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Satz 98 Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sind v, w l.u. so ist $G_{a,v} \cap G_{b,w} = \{s\}$, wobei $s = \frac{1}{\det(v,w)} \left(\det(b,w) \cdot v - \det(a,v) \cdot w \right)$. Insbesondere ist $G_{a,v} \nparallel G_{b,w}$.

Beweis: Es ist $s \in G_{a,v} \cap G_{b,w} \iff \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} : a + t_1 v = s = b + t_2 w$, dh $t_1 v - t_2 w = b - a$. Ist $v = \binom{v_1}{v_2}$, $w = \binom{w_1}{w_2}$, $a = \binom{a_1}{a_2}$ und $b = \binom{b_1}{b_2}$, so entspricht das der Lösbarkeit des Gleichungssystems $\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 \\ v_2 & -w_2 \end{pmatrix} \binom{t_1}{t_2} = \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}$. Da v, w l.u. sind, ist $\det(v, -w) \overset{\text{Satz 37(i)}}{=} -\det(v,w) \overset{\text{Satz 38}}{\neq} 0$. Das Gleichungssystem besitzt daher (nach Bemerkung 1, Seite 42) eine eindeutige Lösung s.
Da v, w l.u. sind, ist $\{v, w\}$ nach Satz 16 (ii) eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Daher gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $s = \alpha v + \beta w$. Wegen

$$\det(a,v) \overset{\text{Satz 40(i)}}{=} \det(a + t_1 v, v) = \det(s, v) = \det(\alpha v + \beta w, v) \overset{\text{Satz 37(i)}}{=} \alpha \det(v,v) + \beta \det(w,v)$$
$$\overset{\text{Satz 38(ii)}}{=} \beta \det(w,v) \overset{\text{Satz 39(i)}}{=} -\beta \det(v,w)$$

und

$$\det(b,w) \overset{\text{Satz 40(i)}}{=} \det(b + t_2 w, w) = \det(s, w) = \det(\alpha v + \beta w, w) \overset{\text{Satz 37(i)}}{=} \alpha \det(v,w) + \beta \det(w,w)$$
$$\overset{\text{Satz 38(ii)}}{=} \alpha \det(v,w)$$

ist
$$s = \alpha v + \beta w = \frac{\det(b,w)}{\det(v,w)} v - \frac{\det(a,v)}{\det(v,w)} w = \frac{1}{\det(v,w)} \left(\det(b,w) \cdot v - \det(a,v) \cdot w \right)$$

Def.: Der Punkt s mit der Eigenschaft $G_{a,v} \cap G_{b,w} = \{s\}$ aus Satz 98 wird als Schnittpunkt der Geraden $G_{a,v}$ und $G_{b,w}$ bezeichnet.

Bsp.: Gesucht ist der Schnittpunkt $\binom{x_1}{x_2}$ der beiden Geraden

$G_1: \binom{x_1}{x_2} = \binom{4}{1} + t\binom{2}{3}$ (bzw. $3x_1 - 2x_2 = 10$, siehe Bsp., Seite 68)

$G_2: \binom{x_1}{x_2} = \binom{1}{3} + s\binom{1}{-1}$ (bzw. $x_1 + x_2 = 4$, siehe Bsp., Seite 67)

1. Möglichkeit: $\binom{4}{1} + t\binom{2}{3} = \binom{1}{3} + s\binom{1}{-1} \Rightarrow t\binom{2}{3} + s\binom{-1}{1} = \binom{1}{3} - \binom{4}{1} = \binom{-3}{2}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2t - s = -3 \\ 3t + s = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5t = -1 \Rightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow \binom{x_1}{x_2} = \binom{4}{1} - \frac{1}{5}\binom{2}{3} = \frac{1}{5}\binom{18}{2}$

2. Möglichkeit: $\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x_1 = 18 \Rightarrow x_1 = \frac{18}{5} \Rightarrow x_2 = 4 - \frac{18}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \binom{x_1}{x_2} = \frac{1}{5}\binom{18}{2}$

3. Möglichkeit: $\binom{x_1}{x_2} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \binom{2}{3} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \binom{1}{-1} \right) = -\frac{1}{5}\left((-4)\cdot\binom{2}{3} - 10\binom{1}{-1} \right)$

$= \frac{1}{5}\left(4\cdot\binom{2}{3} + 10\binom{1}{-1} \right) = \frac{1}{5}\binom{18}{2}$

Satz 99 Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann sind äquivalent:

(i) $G_{a,v} \parallel G_{b,w}$,

(ii) $v = w$ oder v, w sind l.a.,

(iii) $\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: w = cv$.

Beweis: (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) Folgt aus Kor. 13 und $v \neq 0$, $w \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Folgt aus Satz 98.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Ist $b \in G_{a,v}$ so gilt $G_{a,v} = G_{b,w}$ nach Satz 93. Ist $b \notin G_{a,v}$, so gilt $G_{a,v} \cap G_{b,w} = \emptyset$. (Wäre nämlich $s \in G_{a,v} \cap G_{b,w}$, so würde es $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ geben, sodass $a + t_1 v = s = b + t_2 w = b + t_2 c v$ und $b = a + (t_1 - t_2 c)v \in G_{a,v}$, Wid.)

Bemerkungen: 1) Unter den Voraussetzungen von Satz 99 gilt also: $G_{a,v} \nparallel G_{b,w} \Longleftrightarrow v, w$ l.u.

2) Satz 98 besagt, dass zwei nicht parallele Geraden einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt besitzen.

Satz 100 Ist $G_{a,v} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $b \in \mathbb{R}^2$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften $b \in G$ und $G \parallel G_{a,v}$, nämlich $G = G_{b,v}$.

Beweis: Existenz: Offensichtlich gelten $b \in G_{b,v}$ und $G_{b,v} \parallel G_{a,v}$.

Eindeutigkeit: Ist $G_{c,w} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade mit den Eigenschaften $b \in G_{c,w}$ und $G_{c,w} \parallel G_{a,v}$, so $\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: w = cv$ nach Satz 99 und $G_{c,w} \parallel G_{a,v}$ nach Satz 93.

Korollar 101 Parallel zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden im $\mathbb{R}^2$.

Beweis: Für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ist $G \parallel G$, da $G = G$.

$G_1 \| G_2 \iff G_1 = G_2$ oder $G_1 \cap G_2 = \emptyset \iff G_2 = G_1$ oder $G_2 \cap G_1 = \emptyset \iff G_2 \| G_1$

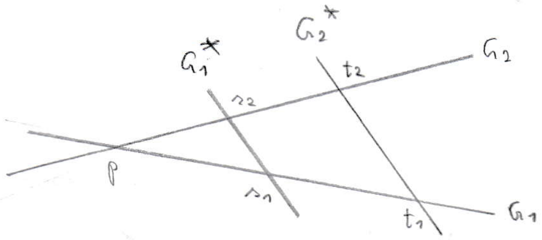
Ist $G_{a,v} \| G_{b,w}$ und $G_{b,w} \| G_{c,u}$, so $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : w = \alpha v$ und $u = \beta w$ (nach Satz 99). Daher $u = (\alpha\beta) v$ (mit $\alpha\beta \neq 0$) und $G_{a,v} \| G_{c,u}$ nach Satz 99.

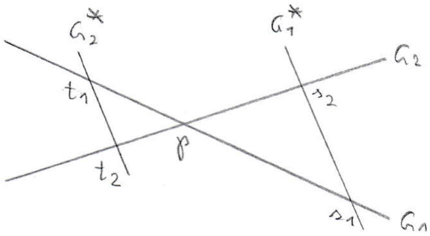
<u>Satz 102</u> (orientierter Strahlensatz) Es seien $p, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden, G_1 die Gerade durch s_1 und t_1, G_2 die Gerade durch s_2 und t_2, p der Schnittpunkt von G_1 und G_2, sowie G_1^* die Gerade durch s_1 und s_2 und G_2^* die Gerade durch t_1 und t_2. Dann sind äquivalent:

(i) $G_1^* \| G_2^*$,

(ii) $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : t_1 - p = \alpha(s_1 - p)$ und $t_2 - p = \alpha(s_2 - p)$

Ist eine (und damit beide) dieser Bedingungen erfüllt, so ist auch $t_2 - t_1 = \alpha(s_2 - s_1)$





<u>Beweis</u> Aus $p, s_1, t_1 \in G_1$ folgt: $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : t_1 - p = \alpha(s_1 - p)$ und aus $p, s_2, t_2 \in G_2$ folgt: $\exists\, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\} : t_2 - p = \beta(s_2 - p)$. Daher

$$t_2 - t_1 = (t_2 - p) - (t_1 - p) = \beta(s_2 - p) - \alpha(s_1 - p)$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Da $G_1^* \| G_2^*$, folgt: $\exists\, \gamma \in \mathbb{R} : t_2 - t_1 = \gamma(s_2 - s_1) = \gamma(s_2 - p) - \gamma(s_1 - p)$

Da $G_1 \nparallel G_2$, sind $s_1 - p$ und $s_2 - p$ l.u. und daher (wegen Satz 16 (iii)) eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Wegen Satz 15 ist $\alpha = \beta = \gamma$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Aus $t_2 - t_1 = (t_2 - p) - (t_1 - p) = \alpha(s_2 - p) - \alpha(s_1 - p) = \alpha(s_2 - s_1)$ folgt $G_1^* \| G_2^*$

<u>Korollar 103</u> (Strahlensatz) Es seien $p, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden, G_1 die Gerade durch s_1 und t_1, G_2 die Gerade durch s_2 und t_2, p der Schnittpunkt von G_1 und G_2, sowie G_1^* die Gerade durch s_1 und s_2 und G_2^* die Gerade durch t_1 und t_2. Ist $G_1^* \| G_2^*$, so gilt

$$\frac{\|t_1 - p\|}{\|s_1 - p\|} = \frac{\|t_2 - t_1\|}{\|s_2 - s_1\|} = \frac{\|t_2 - p\|}{\|s_2 - p\|}.$$

<u>Beweis</u>: Aus Satz 102 folgt, dass $\|t_1 - p\| = |\alpha|\,\|s_1 - p\|$, $\|t_2 - p\| = |\alpha|\,\|s_2 - p\|$ und $\|t_2 - t_1\| = |\alpha|\,\|s_2 - s_1\|$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Daher ist

$$\frac{\|t_1 - p\|}{\|s_1 - p\|} = \frac{\|t_2 - t_1\|}{\|s_2 - s_1\|} = \frac{\|t_2 - p\|}{\|s_2 - p\|} = |\alpha|.$$

22.5.2024

Bemerkung: Die Umkehrung von Kor. 103 ist nicht korrekt. Aus den folgenden Voraussetzungen:

Es seien $p, s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden, G_1 die Gerade durch s_1 und t_1, G_2 die Gerade durch s_2 und t_2, p der Schnittpunkt von G_1 und G_2, G_1^* die Gerade durch s_1 und s_2, G_2^* die Gerade durch t_1 und t_2 und

$$\frac{\|t_1-p\|}{\|s_1-p\|} = \frac{\|t_2-t_1\|}{\|s_2-s_1\|} = \frac{\|t_2-p\|}{\|s_2-p\|}$$

folgt nicht, dass G_1^* und G_2^* parallel sind! Ist $G_1^* \parallel G_2^*$, so gelten:

1) $\langle t_1-p, t_2-p\rangle = 0$ (d.h. die Geraden G_1 und G_2 stehen im rechten Winkel aufeinander)

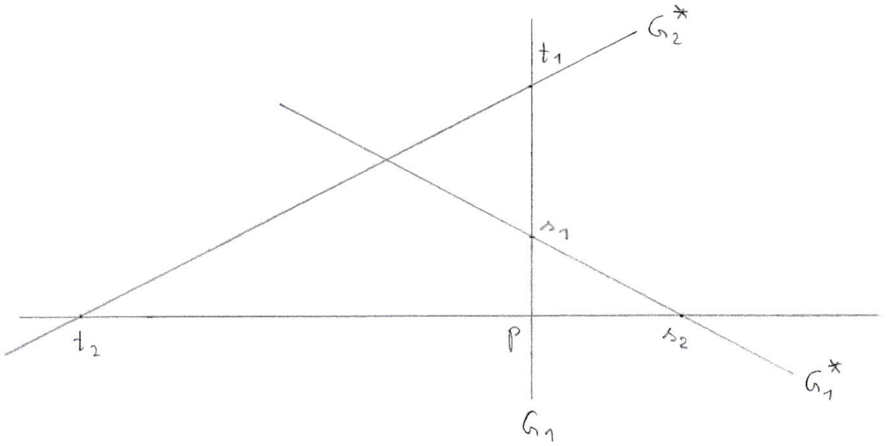
2) $\exists \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: t_1-p = \alpha(s_1-p)$ und $t_2-p = -\alpha(s_2-p)$
(d.h. p liegt entweder zwischen s_1 und t_1 oder zwischen s_2 und t_2)

Insbesondere kann $G_1^* \parallel G_2^*$ gefolgert werden, wenn G_1 und G_2 nicht im rechten Winkel aufeinander stehen.

Beweis: Es seien $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $s_1 = \binom{0}{1}$, $t_1 = \binom{0}{\alpha}$ ($\Rightarrow G_1$ ist die x_2-Achse $x_1 = 0$), $s_2 = \binom{\beta}{0}$, $t_2 = \binom{-\alpha\beta}{0}$ ($\Rightarrow G_2$ ist die x_1-Achse $x_2 = 0$) Dann ist $p = \binom{0}{0}$; G_1^* die Gerade $\frac{x_1}{\beta} + x_2 = 1$ ($\Leftrightarrow x_1 + \beta x_2 = \beta$) und G_2^* die Gerade $-\frac{x_1}{\alpha\beta} + \frac{x_2}{\alpha} = 1$ ($\Leftrightarrow x_1 - \beta x_2 = -\alpha\beta$). Dann ist

$$\frac{\|t_1-p\|}{\|s_1-p\|} = \frac{\alpha}{1} = \alpha, \quad \frac{\|t_2-t_1\|}{\|s_2-s_1\|} = \frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\alpha^2}}{\sqrt{\beta^2+1}} = \alpha \quad \text{und} \quad \frac{\|t_2-p\|}{\|s_2-p\|} = \frac{\alpha\beta}{\beta} = \alpha$$

aber $G_1^* \nparallel G_2^*$ da $G_1^* \cap G_2^* = \left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta(1-\alpha)\\ 1+\alpha\end{pmatrix}\right\}$



Es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, sodass $t_1 - p = \alpha(s_1-p)$ und $t_2 - p = \beta(s_2-p)$. Daher ist

$$|\alpha| = \frac{\|t_1-p\|}{\|s_1-p\|} = \frac{\|t_2-p\|}{\|s_2-p\|} = |\beta| \Rightarrow \alpha = \beta \text{ oder } \alpha = -\beta$$

Wenn $\alpha = \beta$, so $t_2 - t_1 = (t_2-p)-(t_1-p) = \alpha(s_2-p) - \alpha(s_1-p) = \alpha(s_2-s_1)$ und $G_1^* \parallel G_2^*$.

Also $\alpha = -\beta \Rightarrow t_2 - p = -\alpha(s_2-p)$, d.h. 2) ist erfüllt

$\Rightarrow (t_1-p)+(t_2-p) = \alpha(s_1-p) - \alpha(s_2-p) = \alpha(s_1-s_2)$. Aus $|\alpha| = \frac{\|t_1-p\|}{\|s_1-p\|} = \frac{\|t_2-t_1\|}{\|s_2-s_1\|}$ folgt

$$\|(t_1-p)+(t_2-p)\| = |\alpha|\cdot\|s_2-s_1\| = \|t_2-t_1\| = \|(t_2-p)-(t_1-p)\|$$

$$\Rightarrow \|t_1-p\|^2 + 2\langle t_1-p, t_2-p\rangle + \|t_2-p\|^2 = \|(t_1-p)+(t_2-p)\|^2$$
$$= \|(t_2-p)-(t_1-p)\|^2 = \|t_1-p\|^2 - 2\langle t_1-p, t_2-p\rangle + \|t_2-p\|^2$$
$\Rightarrow 4\langle t_1-p, t_2-p\rangle = 0 \Rightarrow \langle t_1-p, t_2-p\rangle = 0$, d.h. 1) ist erfüllt

Notation: Sind $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$, so bezeichne $G(a,b) := G_{a,b-a}$ die Gerade durch a und b.

Def.: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $M \neq \emptyset$ heißt kollinear wenn es eine Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $M \subseteq G$ gibt.

Satz 104 Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden und nicht kollinear. Dann sind äquivalent:

(i) $a + c = b + d$,

(ii) $G(a,b) \parallel G(c,d)$ und $G(a,d) \parallel G(b,c)$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) $a + c = b + d \Rightarrow b - a = c - d = -(d-c)$ und $d - a = c - b$

$\Rightarrow G_{a,b-a} \parallel G_{c,d-c}$ und $G_{a,d-a} \parallel G_{b,c-b}$

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: d - c = \alpha(b-a)$ und $c - b = \beta(d-a)$ und $b-a, d-a$ sind l.u.

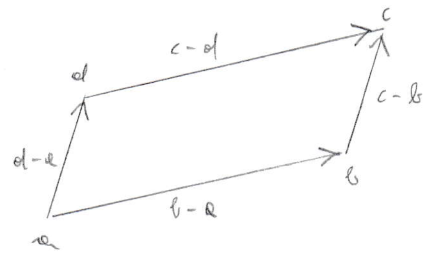
(Wären $b-a, d-a$ l.a., so $\exists \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: d - a = \gamma(b-a) \Rightarrow d = a + \gamma(b-a) \in G(a,b)$

und daher $c - b = \beta(d-a) = \beta\gamma(b-a) \Rightarrow c = b + \beta\gamma(b-a) \in G(a,b)$, d.h. $a,b,c,d \in G(a,b)$, Wid.)

Es ist $d - b = (d-c) + (c-b) = \alpha(b-a) + \beta(d-a)$. Da auch $d - b = (-1)(b-a) + 1\cdot(d-a)$.

Da $b-a, d-a$ nach Satz 16 (ii) eine Basis ist, folgt $\alpha = -1, \beta = 1 \Rightarrow c - b = d - a \Rightarrow a + c = b + d$

Def.: Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden und nicht kollinear und erfüllen eine (und damit beide) der Bedingungen von Satz 104, so nennt man a, b, c, d ein Parallelogramm.



Def.: Sind $a, b \in \mathbb{R}^2$, so nennt man $\frac{1}{2}(a+b)$ den Mittelpunkt von a und b

Korollar 105 Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschieden und nicht kollinear. Dann sind äquivalent:

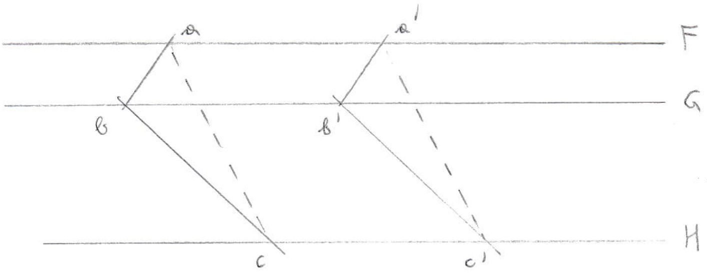
(i) a, b, c, d bilden ein Parallelogramm,

(ii) $\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$ (d.h. die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des Parallelogramms stimmen überein).

Lemma 106 Sind $F, G \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene, parallele Geraden (d.h. $F \cap G = \emptyset$), $a \in F$ und $b \in G$, so ist $G(a,b) \nparallel F$ (und daher $G(a,b) \nparallel G$ wegen Kor. 101).

Beweis: $G(a,b) \cap F \neq \emptyset$, da $a \in G(a,b) \cap F$ und $G(a,b) \neq F$, da $b \in G(a,b) \setminus F$.

Satz 107 (Kleiner Satz von DESARGUE) Es seien $F, G, H \subseteq \mathbb{R}^2$ drei paarweise verschiedene parallele Geraden, $a, a' \in F$, $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$. Gilt $G(a,b) \parallel G(a',b')$ und $G(b,c) \parallel G(b',c')$, so gilt auch $G(a,c) \parallel G(a',c')$.



Beweis: Ist $a = a'$, so folgt aus $G(a,b) \parallel G(a',b')$, dass $G(a,b) = G(a',b')$ und daher $b = b'$ (wegen Lemma 106) und analog $c = c'$. Also ist $G(a,c) = G(a',c')$.

Ist $a \neq a'$, so ist auch $b \neq b'$ und $c \neq c'$. (Aus $b = b'$ oder $c = c'$ würde wie oben $a = a'$ folgen)

Da a, a', b, b', c, c' sind paarweise verschieden, $F = G(a,a')$, $G = G(b,b')$ und $H = G(c,c')$)

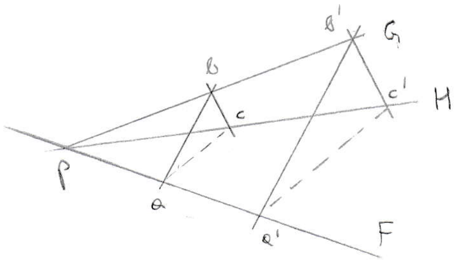
Aus $G(a,b) \parallel G(a',b')$ und $G(a,a') \parallel G(b,b')$ folgt (wegen Satz 104) $a + b' = a' + b$.

Aus $G(b,c) \parallel G(b',c')$ und $G(b,b') \parallel G(c,c')$ folgt (wegen Satz 104) $b + c' = b' + c$.

$\Rightarrow a - c = (a + b') - (b' + c) = (a' + b) - (b + c') = a' - c' \quad \Rightarrow a + c' = a' + c$ und

$G(a,c) \parallel G(a',c')$ wegen Satz 104.

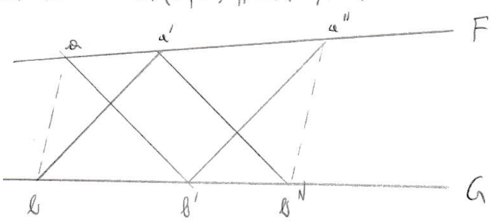
Satz 108 (Satz von DESARGUE) Es seien $F, G, H \subseteq \mathbb{R}^2$ drei paarweise verschiedene Geraden, die einander in $p \in \mathbb{R}^2$ schneiden, $a, a' \in F$, $b, b' \in G$ und $c, c' \in H$ (wobei $p \notin \{a, a', b, b', c, c'\}$). Gilt $G(a,b) \parallel G(a',b')$ und $G(b,c) \parallel G(b',c')$, so gilt auch $G(a,c) \parallel G(a',c')$.



Beweis: $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $a' - p = \alpha(a - p)$, $b' - p = \beta(b - p)$ und $c' - p = \gamma(c - p)$

Aus $G(a,b) \parallel G(a',b')$ folgt (wegen Satz 102) $\alpha = \beta$ und aus $G(b,c) \parallel G(b',c')$ folgt (wieder wegen Satz 102) $\beta = \gamma$. Also ist $\alpha = \gamma$ und (noch einmal wegen Satz 102) $G(a,c) \parallel G(a',c')$

Satz 109 (Satz von PAPPUS) Es seien $F, G \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden, $a, a', a'' \in F \setminus G$ und $b, b', b'' \in G \setminus F$ jeweils paarweise verschieden. Gilt $G(a,b') \parallel G(a',b'')$ und $G(a',b) \parallel G(a'',b')$, so gilt auch $G(a,b) \parallel G(a'',b'')$.



27.5.2024

Beweis: 1. Fall: $F \parallel G$

Aus $G(a,a') \parallel G(b',b'')$ und $G(a,b') \parallel G(a',b'')$ folgt (wegen Satz 104) $a+b'' = a'+b'$.

Aus $G(a',a'') \parallel G(b,b')$ und $G(a',b) \parallel G(a'',b')$ folgt (wegen Satz 104) $a'+b' = a''+b$.

Also ist $a+b'' = a''+b$ und daher (wegen Satz 104) $G(a,b) \parallel G(a'',b'')$.

2. Fall: $F \nparallel G$. Dann sei $F \cap G = \{p\}$.

$\exists \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: a'-p = \alpha(a-p),\ a''-p = \beta(a-p),\ b'-p = \gamma(b-p)$ und $b''-p = \delta(b-p)$

Es folgt $a''-p = \frac{\beta}{\alpha}(a'-p)$ und $b''-p = \frac{\delta}{\gamma}(b'-p)$.

Aus $G(a,b') \parallel G(a',b'')$ folgt (wegen Satz 102) $\alpha = \frac{\delta}{\gamma} \Rightarrow \alpha\gamma = \delta$.

Aus $G(a',b) \parallel G(a'',b)$ folgt (wegen Satz 102) $\gamma = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \alpha\gamma = \beta$.

Also ist $\beta = \delta$ und (wieder wegen Satz 102) $G(a,b) \parallel G(a'',b'')$.

Def.: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $p \in \mathbb{R}^2$, so definieren wir den Abstand $d(p,G)$ von p zur Geraden G durch $d(p,G) := \min\{\|x-p\| \mid x \in G\}$.

Bemerkung: Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist zunächst nur klar, dass $\inf\{\|x-p\| \mid x \in G\}$ existiert. Wir werden aber zeigen, dass das Minimum tatsächlich angenommen wird.

Satz 110 Es sei $G_{a,v} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $p \in \mathbb{R}^2$. Dann gelten:

(i) $G_{a,v} \cap G_{p,v^\perp} = \{q\}$ mit $q = p + \frac{\langle a-p, v^\perp\rangle}{\|v\|^2} v^\perp$,

(ii) $d(p, G_{a,v}) = \|p-q\| = \frac{|\langle p-a, v^\perp\rangle|}{\|v\|}$.

Beweis: (i) Nach Lemma 96 sind $v, v^\perp$ l.u. und $\exists!\, q \in \mathbb{R}^2: G_{a,v} \cap G_{p,v^\perp} = \{q\}$ (nach Satz 98). Da $q \in G_{p,v^\perp}$ gibt es $\alpha \in \mathbb{R}: q = p + \alpha v^\perp$. Die Gleichung der Gerade $G_{a,v}$ ist $\langle x-a, v^\perp\rangle = 0$ (nach Satz 97). Da $q \in G_{a,v}$ ist $\langle p-a+\alpha v^\perp, v^\perp\rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle p-a, v^\perp\rangle + \alpha\langle v^\perp, v^\perp\rangle = \langle p-a, v^\perp\rangle + \alpha\|v\|^2 \Rightarrow \alpha = \frac{\langle a-p, v^\perp\rangle}{\|v\|^2}$$

$$\Rightarrow q = p + \frac{\langle a-p, v^\perp\rangle}{\|v\|^2} v^\perp$$

(ii) $$\|p-q\| = \left\| \frac{\langle a-p, v^\perp\rangle}{\|v\|^2} v^\perp \right\| = \frac{|\langle a-p, v^\perp\rangle|}{\|v\|^2}\|v\| = \frac{|\langle a-p, v^\perp\rangle|}{\|v\|} = \frac{|\langle p-a, v^\perp\rangle|}{\|v\|}$$

Ist $x \in G_{a,v}$, so ist $x-p = (x-q)-(p-q)$ wobei $\langle x-q, p-q\rangle = 0$ (da $p-q = \alpha v^\perp$ und $x-q = \beta v$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$) und daher

$$\|p-x\|^2 \overset{\text{Kor. 64}}{=} \|x-q\|^2 + \|p-q\|^2 \geq \|p-q\|^2 \Rightarrow \|p-x\| \geq \|p-q\|$$ und daher

$$\|p-q\| = \min\{\|p-x\| \mid x \in G_{a,v}\} = d(p, G_{a,v})$$

Bemerkungen: 1) Wegen $\frac{\langle a-p, v^\perp\rangle}{\|v\|^2}\, v^\perp = \left\langle a-p, \frac{1}{\|v^\perp\|}\, v^\perp\right\rangle \cdot \frac{1}{\|v^\perp\|}\, v^\perp$ bzw

$\frac{|\langle p-a, v^\perp\rangle|}{\|v\|} = \left|\left\langle p-a, \frac{1}{\|v^\perp\|}\, v^\perp\right\rangle\right|$ kann man sich $\frac{1}{\|v\|^2}$ bzw $\frac{1}{\|v\|}$ als Normierungsfaktor vorstellen.

2). Es ist darum sinnvoll, diese Normierung vorauszusetzen. Ist die Gerade G durch die Gleichung $\langle x, v^\perp\rangle = c$ (mit $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$ und $c \in \mathbb{R}$) gegeben, spricht man von der HESSEschen Normalform der Geraden G.

Korollar 111 Ist die Gerade G durch die Gleichung $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ gegeben (mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, wobei α, β nicht beide $= 0$ sind) und $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, so ist

$$d(p, G) = \frac{|\alpha p_1 + \beta p_2 - \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Beweis: Es ist $v^\perp = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\gamma = \langle a, v^\perp\rangle \ \forall a \in G$ und $\|v\| = \|v^\perp\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Bsp.: Ist $a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $p = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, so ist

$$d(p, G_{a,v}) = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \left|\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle\right| = \frac{1}{5} \left|\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle\right| = \frac{7 \cdot 5}{5} = 7$$

Die Gleichung von $G_{a,v}$ ist $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rangle \Rightarrow 3x_1 - 4x_2 = 4$

und $d(p, G_{a,v}) = \frac{|3 \cdot (-5) - 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|7 \cdot (-5)|}{5} = 7$

Korollar 112 Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden $G_{a,v}$, so ist

$$f(x) = x - \frac{2\langle x-a, v^\perp\rangle}{\|v\|^2}\, v^\perp.$$

Beweis: Ist (wie in Satz 110) $G_{a,v} \cap G_{x,v^\perp} = \{q\}$, so $q = x - \frac{\langle x-a, v^\perp\rangle}{\|v\|^2}\, v^\perp$.

Wegen $f(x) - q = q - x$ folgt $f(x) = 2q - x = x - 2\frac{\langle x-a, v^\perp\rangle}{\|v\|^2}\, v^\perp$.