11. Kreise in der Ebene

Definition: Ist $m \in \mathbb{R}^2$ und $\rho > 0$, so wird $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-m\| = \rho\}$ als Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ρ bezeichnet

Bemerkung: Es ist oft hilfreich, die Kreisgleichung $\|x-m\| = \rho$ anders zu schreiben.

Ist $m = \binom{m_1}{m_2}$ und $x = \binom{x_1}{x_2}$, so ist

$$\|x-m\| = \rho \iff \|x-m\|^2 = \rho^2 \iff \langle x-m, x-m\rangle = \rho^2 \iff (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 = \rho^2$$

oder auch

$$\|x-m\| = \rho \iff \|x-m\|^2 = \rho^2 \iff \langle x-m, x-m\rangle = \rho^2 \iff \langle x,x\rangle - 2\langle x,m\rangle + \langle m,m\rangle = \rho^2$$

$$\iff \|x\|^2 - 2\langle x,m\rangle = \rho^2 - \|m\|^2$$

Satz 147 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ρ und $a, b \in K$, $a \neq b$, so liegt m auf der Mittelsenkrechten $M_{a,b}$ von a und b, d.h.

$$m \in M_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x - \tfrac{1}{2}(a+b), a-b\rangle = 0\}.$$

Beweis: Da $a, b \in K$ ist $\|a\|^2 - 2\langle a,m\rangle = \rho^2 - \|m\|^2 = \|b\|^2 - 2\langle b,m\rangle$ und daher

$$2\langle a-b,m\rangle = 2\langle a,m\rangle - 2\langle b,m\rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2 \overset{\text{Lemma 114 (i)}}{=} \langle a+b, a-b\rangle$$ und

$\langle m, a-b\rangle = \langle \tfrac{1}{2}(a+b), a-b\rangle$, d.h. $m \in M_{a,b}$.

Satz 148 (Satz von THALES) Es sei $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Dann sind äquivalent:

(i) c liegt auf dem Kreis um $m = \frac{1}{2}(a+b)$ mit Radius $\frac{1}{2}\|a-b\|$,

(ii) $\langle c-a, c-b\rangle = 0$ ($c-a$ und $c-b$ sind orthogonal), d.h. das Dreieck a,b,c ist rechtwinklig (mit $\gamma = \frac{\pi}{2}$).

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
\langle c-a, c-b\rangle &= \langle c,c\rangle - \langle a+b, c\rangle + \langle a,b\rangle \\
&= \langle c,c\rangle - 2\langle \tfrac{1}{2}(a+b), c\rangle + \langle \tfrac{1}{2}(a+b), \tfrac{1}{2}(a+b)\rangle - \tfrac{1}{4}\langle a,a\rangle + \tfrac{1}{2}\langle a,b\rangle - \tfrac{1}{4}\langle b,b\rangle \\
&= \langle c - \tfrac{1}{2}(a+b), c - \tfrac{1}{2}(a+b)\rangle - \tfrac{1}{4}\left(\langle a,a\rangle - 2\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle\right) \\
&= \langle c - \tfrac{1}{2}(a+b), c - \tfrac{1}{2}(a+b)\rangle - \tfrac{1}{4}\langle a-b, a-b\rangle \\
&= \|c - \tfrac{1}{2}(a+b)\|^2 - \tfrac{1}{4}\|a-b\|^2
\end{aligned}$$

und daher

$$\langle c-a, c-b\rangle = 0 \iff \|c - \tfrac{1}{2}(a+b)\|^2 = \tfrac{1}{4}\|a-b\|^2 \iff \|c - \tfrac{1}{2}(a+b)\| = \tfrac{1}{2}\|a-b\|$$

Bemerkung: Man kann Bedingung (ii) auch so formulieren:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \iff \varphi_{a-c,b-c} = \frac{\pi}{2} \iff \cos\varphi_{a-c,b-c} = 0 \iff \frac{\langle a-c, b-c\rangle}{\|a-c\|\cdot\|b-c\|} = 0$$

$$\iff \langle a-c, b-c\rangle = 0 \iff \langle c-a, c-b\rangle = 0$$

Definition: Eine Gerade $T \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Tangente eines Kreises $K \subseteq \mathbb{R}^2$ wenn K und T genau einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ gemeinsam haben (d.h. $K \cap T = \{p\}$). Man sagt auch, die Gerade T würde den Kreis K im Punkt p berühren.

Satz 149 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ϱ und $p \in K$, so gibt es genau eine Tangente an den Kreis durch p, nämlich $G_{p,(p-m)^\perp}$. Ihre Gleichung ist durch $\langle x-p, p-m\rangle = 0$ bzw. $\langle x-m, p-m\rangle = \varrho^2$ gegeben.

Beweis: Es sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir betrachten den Schnitt der Gerade $G_{p,v}$ mit dem Kreis K. Es ist

$$p + \alpha v \in K \iff \|p + \alpha v - m\| = \varrho$$

$$\iff \varrho^2 = \|p+\alpha v - m\|^2 = \langle p-m+\alpha v, p-m+\alpha v\rangle$$

$$= \langle p-m, p-m\rangle + 2\alpha\langle p-m, v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle$$

$$= \|p-m\|^2 + 2\alpha\langle p-m,v\rangle + \alpha^2\|v\|^2 = \varrho^2 + 2\alpha\langle p-m,v\rangle + \alpha^2\|v\|^2$$

$$\iff 0 = \alpha^2\|v\|^2 + 2\alpha\langle p-m,v\rangle = \alpha\left(\alpha\|v\|^2 + 2\langle p-m,v\rangle\right)$$

$$\iff \alpha \in \left\{0, \frac{\langle m-p,v\rangle}{\|v\|^2}\right\}$$

Es folgt: $G_{p,v}$ ist Tangente $\iff \alpha^2\|v\|^2 + 2\alpha\langle p-m,v\rangle = 0$ hat nur die Lösung $\alpha = 0$

$\iff \langle p-m, v\rangle = 0 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}: v = \beta(p-m)^\perp$

Es gibt daher genau eine Tangente an K durch den Punkt p (nämlich $G_{p,(p-m)^\perp}$) und ihre Gleichung ist $\langle x, p-m\rangle = \langle p, p-m\rangle \iff \langle x-p, p-m\rangle = 0$.

Die 2. Version der Geradengleichung der Tangente ist dazu äquivalent, denn:

Ist $\langle x-p, p-m\rangle = 0$, so folgt

$$\langle x-m, p-m\rangle = \langle x-p+p-m, p-m\rangle = \langle x-p, p-m\rangle + \langle p-m, p-m\rangle = 0 + \varrho^2 = \varrho^2.$$

Ist $\langle x-m, p-m\rangle = \varrho^2$, so folgt

$$\langle x-p, p-m\rangle = \langle x-m+m-p, p-m\rangle = \langle x-m, p-m\rangle - \langle p-m, p-m\rangle = \varrho^2 - \varrho^2 = 0$$

19.6.2029

Korollar 150 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ϱ. Ist $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade, so sind äquivalent:

(i) G ist eine Tangente an den Kreis K,

(ii) $d(m, G) = \varrho$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $G \cap K = \{p\}$, so ist $G = G_{p,(p-m)^\perp}$ und nach Satz 110 (iii) ist

$$d(m,G) = d(m, G_{p,(p-m)^\perp}) = \frac{|\langle m-p, m-p\rangle|}{\|p-m\|} = \frac{\|p-m\|^2}{\|p-m\|} = \|p-m\| = \varrho.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $G = G_{o,v}$ und $\{p\} = G_{o,v} \cap G_{m,v^\perp}$, so ist nach Satz 110

$\rho = d(m,G) = \|m-p\|$ und $\|m-x\|^2 = \|m-p\|^2 + \|p-x\|^2 = \rho^2 + \|p-x\|^2 > \rho^2 \quad \forall x \in G \setminus \{p\}$

<u>Satz 151</u> Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ρ und $a \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt mit $\|a-m\| > \rho$ (dh a liegt außerhalb des Kreises). Dann gibt es genau zwei Tangenten an den Kreis K, die durch a gehen. Diese beiden Tangenten berühren den Kreis K dabei in den Punkten

$$p_{1,2} = m + \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2}(a-m) \pm \frac{\rho}{\|a-m\|}\sqrt{\|a-m\|^2-\rho^2}\,(a-m)^\perp.$$

<u>Beweis</u>: Wir suchen jene Punkte $p \in K$, die die Eigenschaft besitzen, dass a auf der Tangente an K durch p liegt. Dh p muss die beiden Bedingungen $\langle a-m, p-m\rangle = \rho^2$ und $\|p-m\| = \rho$ erfüllen. Da $\{a-m, (a-m)^\perp\}$ nach Lemma 96 eine Basis ist, gibt es eindeutige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $p-m = \alpha(a-m) + \beta(a-m)^\perp$. Einsetzen in die erste Bedingung gibt

$$\rho^2 = \langle \alpha(a-m)+\beta(a-m)^\perp, a-m\rangle = \alpha\langle a-m,a-m\rangle + \beta\langle a-m,(a-m)^\perp\rangle = \alpha\|a-m\|^2$$

und daher $\alpha = \dfrac{\rho^2}{\|a-m\|^2}$, dh $p-m = \dfrac{\rho^2}{\|a-m\|^2}(a-m) + \beta(a-m)^\perp$. Einsetzen in die zweite Bedingung gibt

$$\rho^2 = \|p-m\|^2 = \langle p-m,p-m\rangle = \left\langle \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2}(a-m)+\beta(a-m)^\perp, \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2}(a-m)+\beta(a-m)^\perp\right\rangle$$

$$= \frac{\rho^4}{\|a-m\|^4}\langle a-m,a-m\rangle + \beta^2\langle (a-m)^\perp,(a-m)^\perp\rangle = \frac{\rho^4}{\|a-m\|^4}\|a-m\|^2 + \beta^2\|a-m\|^2$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2} = \frac{\rho^4}{\|a-m\|^4} + \beta^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2} - \frac{\rho^4}{\|a-m\|^4} = \frac{\rho^2}{\|a-m\|^4}\left(\|a-m\|^2-\rho^2\right)$$

$$\Rightarrow \beta_{1,2} = \pm\frac{\rho}{\|a-m\|^2}\sqrt{\|a-m\|^2-\rho^2} \Rightarrow p_{1,2} = m + \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2}(a-m) \pm \frac{\rho}{\|a-m\|^2}\sqrt{\|a-m\|^2-\rho^2}\,(a-m)^\perp$$

Tatsächlich erfüllen die beiden Punkte $p_{1,2}$ beide Bedingungen:

$$\|p_{1,2}-m\|^2 = \left\langle \alpha(a-m)+\beta_{1,2}(a-m)^\perp, \alpha(a-m)+\beta_{1,2}(a-m)^\perp\right\rangle = (\alpha^2+\beta_{1,2}^2)\|a-m\|^2$$

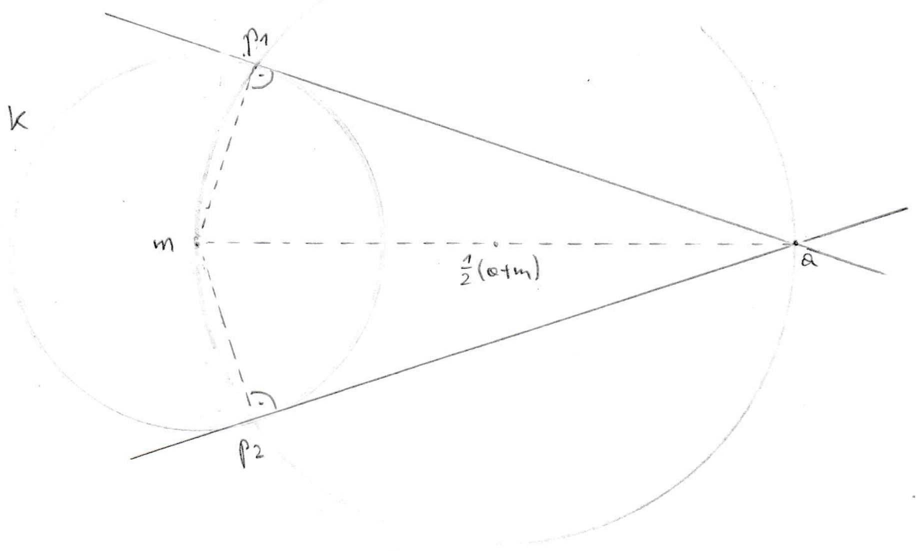
$$= \left(\frac{\rho^4}{\|a-m\|^4} + \frac{\rho^2}{\|a-m\|^4}\left(\|a-m\|^2-\rho^2\right)\right)\|a-m\|^2 = \frac{\rho^2\|a-m\|^2}{\|a-m\|^4}\cdot\|a-m\|^2 = \rho^2$$

und

$$\langle p_{1,2}-m, a-m\rangle = \langle \alpha(a-m)+\beta_{1,2}(a-m)^\perp, a-m\rangle = \alpha\langle a-m,a-m\rangle + \beta_{1,2}\langle (a-m)^\perp, a-m\rangle$$

$$= \alpha\|a-m\|^2 = \frac{\rho^2}{\|a-m\|^2}\cdot\|a-m\|^2 = \rho^2.$$

Bemerkung: Um die beiden Tangenten aus Satz 151 zu konstruieren, verwendet man den Satz von Thales (Satz 148). Man zeichnet einen Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a+m)$ und Radius $\frac{1}{2}\|a-m\|$. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit K sind die Punkte $p_{1,2}$ (da $\langle a-p_{1,2}, p_{1,2}-m\rangle = 0$).



Satz 152 (Sehnen-Tangenten-Satz) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis und $a \in \mathbb{R}^2 \setminus K$.

(i) Jede Gerade $G_{a,v}$ besitzt höchstens zwei Schnittpunkte mit K, d.h. $|G_{a,v} \cap K| \in \{0,1,2\}$,

(ii) Besitzen $G_{a,v}$ und K zwei Schnittpunkte s_1, s_2 (d.h. $G_{a,v} \cap K = \{s_1, s_2\}$), so ist

$$\|a-s_1\| \cdot \|a-s_2\| = \left| \|a-m\|^2 - \rho^2 \right| = \begin{cases} \|a-m\|^2 - \rho^2 & \text{falls } \|a-m\| > \rho \text{ (d.h. } a \text{ liegt außerhalb von } K) \\ \rho^2 - \|a-m\|^2 & \text{falls } \|a-m\| < \rho \text{ (d.h. } a \text{ liegt innerhalb von } K) \end{cases}$$

(iii) Ist $\|a-m\| > \rho$ und $G_{a,v}$ eine Tangente an K mit $G_{a,v} \cap K = \{p\}$, so ist

$$\|a-p\|^2 = \|a-m\|^2 - \rho^2.$$

Beweis: Wir bestimmen jene $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $a + \alpha v \in K$. Dafür setzen wir in die Kreisgleichung $\|x\|^2 - 2\langle x, m\rangle + \|m\|^2 - \rho^2 = 0$ ein:

$$\langle a+\alpha v, a+\alpha v\rangle - 2\langle a+\alpha v, m\rangle + \langle m,m\rangle - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle a,a\rangle + 2\alpha\langle a,v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle - 2\langle a,m\rangle - 2\alpha\langle v,m\rangle + \langle m,m\rangle - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|v\|^2\alpha^2 + 2\langle a-m, v\rangle\alpha + \langle a,a\rangle - 2\langle a,m\rangle + \langle m,m\rangle - \rho^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \|v\|^2\alpha^2 + 2\langle a-m, v\rangle\alpha + \langle a-m, a-m\rangle - \rho^2 = 0$$

Diese quadratische Gleichung besitzt höchstens zwei reelle Lösungen (womit (i) gezeigt ist), nämlich

$$\alpha_{1,2} = \frac{2\langle m-a, v\rangle \pm \sqrt{4\langle m-a,v\rangle^2 - 4\|v\|^2(\|a-m\|^2 - \rho^2)}}{2\|v\|^2} \quad (\text{falls } \alpha_{1,2} \in \mathbb{R})$$

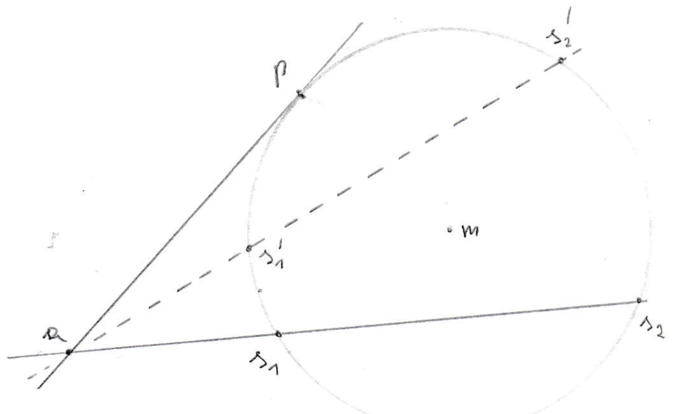
d.h. $\alpha_{1,2} = \dfrac{\langle m-a,v\rangle \pm \sqrt{\langle m-a,v\rangle^2 - \|v\|^2\left(\|a-m\|^2-\rho^2\right)}}{\|v\|^2}$. Es folgt

$$\alpha_1\cdot\alpha_2 = \frac{\langle m-a,v\rangle^2 - \left(\langle m-a,v\rangle^2 - \|v\|^2\left(\|a-m\|^2-\rho^2\right)\right)}{\|v\|^4} = \frac{\|v\|^2\left(\|a-m\|^2-\rho^2\right)}{\|v\|^4} = \frac{\|a-m\|^2-\rho^2}{\|v\|^2}$$

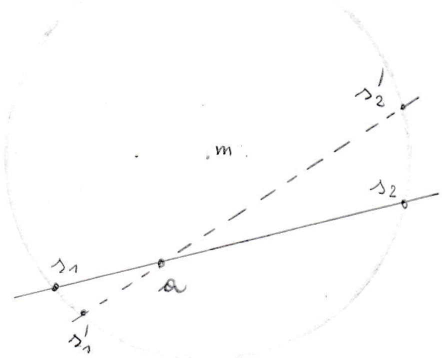
(was auch sofort aus dem VIETAschen Wurzelsatz folgt). Für $s_{1,2} = a + \alpha_{1,2}\cdot v$ erhält man

$$\|s_1-a\|\cdot\|s_2-a\| = \|\alpha_1 v\|\cdot\|\alpha_2 v\| = |\alpha_1\alpha_2|\cdot\|v\|^2 = \frac{\left|\|a-m\|^2-\rho^2\right|}{\|v\|^2}\cdot\|v\|^2 = \left|\|a-m\|^2-\rho^2\right|$$

Damit sind (ii) und (iii) bewiesen. (Ist $G_{a,v}$ eine Tangente, so ist $s_1 = s_2 = p$.)



$\|a-m\| > \rho$



$\|a-m\| < \rho$

Bemerkung: Satz 152 ist auch für $a \in K$ korrekt. Allerdings ist dann $a \in \{s_1, s_2\}$ bzw. $a = p$ und die Gleichung aus (ii) bzw. (iii) wird zu $0=0$.

Korollar 153 Sind $K, L \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Kreise, so besitzen K und L höchstens zwei Schnittpunkte (d.h. $|K \cap L| \in \{0,1,2\}$).

Beweis: Haben die Kreise K und L die Mittelpunkte m_1 und m_2 und Radien ρ_1 und ρ_2, so werden sie durch die Gleichungen

$$\|x\|^2 - 2\langle x, m_1\rangle = \rho_1^2 - \|m_1\|^2 \quad \text{und} \quad \|x\|^2 - 2\langle x, m_2\rangle = \rho_2^2 - \|m_2\|^2$$

beschrieben. Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so erhält man

$$2\langle x, m_2-m_1\rangle = \rho_1^2 - \rho_2^2 - \|m_1\|^2 + \|m_2\|^2 \iff \langle x, m_2-m_1\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\rho_1^2 - \rho_2^2 - \|m_1\|^2 + \|m_2\|^2\right)$$

Das ist die Gleichung einer Geraden. Bezeichnet man diese mit G, so ist damit $K \cap L \subseteq G$ gezeigt. Da natürlich auch $K \cap L \subseteq K$ gilt, folgt $K \cap L \subseteq K \cap G$ und daher $|K \cap L| \leq |K \cap G| \leq 2$ nach Satz 152 (i).

Korollar 154 Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so gibt es genau einen Kreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $a, b, c \in K$ und zwar den Kreis, dessen Mittelpunkt der Umkreismittelpunkt m (wie in Satz 121) und dessen Radius der Umkreisradius $\frac{A \cdot B \cdot C}{4F}$ ist (d.h. der Umkreis des Dreiecks).

Beweis: Nach Satz 147 liegt der Mittelpunkt eines derartigen Kreises in $M_{a,b} \cap M_{b,c} \cap M_{a,c} = \{m\}$. Die Bhr. folgt aus Satz 121.

Korollar 155 Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so sind drei Geraden $G(a,b)$, $G(b,c)$ und $G(a,c)$ Tangenten

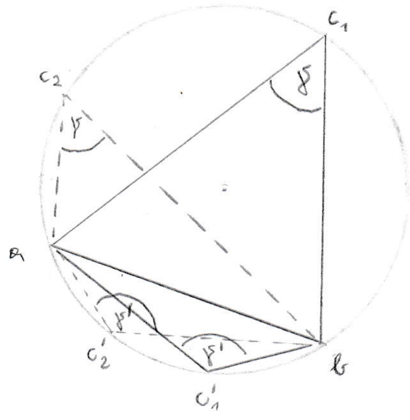
(i) des Kreises mit Mittelpunkt i (wie in Satz 138) und Radius $\frac{F}{S}$ (d.h. der Inkreis des Dreiecks),

(ii) der drei Kreise mit Mittelpunkt a^* (bzw. b^* bzw. c^*) (wie in Satz 139) und Radius $\frac{F}{S-A}$ (bzw. $\frac{F}{S-B}$ bzw. $\frac{F}{S-C}$) (d.h. der Ankreise des Dreiecks).

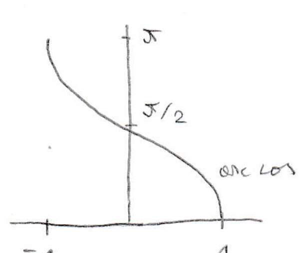
Beweis: (i) Folgt aus Satz 138.

(ii) Folgt aus Satz 139.

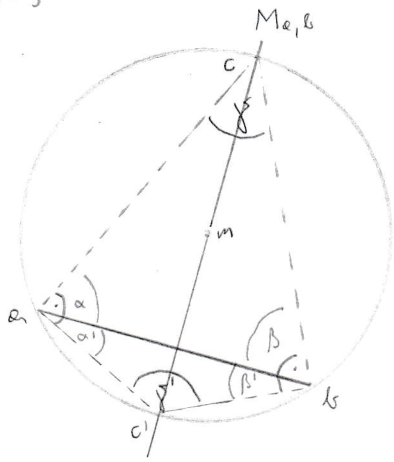
Satz 156 (Peripheriewinkelsatz) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ρ. Sind $a, b \in K$, $a \neq b$, so ist für $c \in K \setminus \{a, b\}$ der Peripheriewinkel $\varphi_{a-c, b-c}$ auf jedem der beiden Kreisbögen, die a mit b verbinden, jeweils konstant. Sind die beiden Weite der Peripheriewinkel durch γ und γ' gegeben, so ist $\gamma + \gamma' = \pi$.



Beweis: Die Abbildung $K \setminus \{a, b\} \to (0, \pi)$, $c \mapsto \varphi_{a-c, b-c} = \arccos \frac{\langle a-c, b-c \rangle}{\|a-c\| \, \|b-c\|}$ ist (nach Sätzen aus der Analysis) stetig. (Dabei bezeichnet $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ die Umkehrfunktion der Einschränkung $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ des cosinus.)



Ist $c \in K \setminus \{a,b\}$ und $\gamma = \varphi_{a-c,b-c}$, so ist $\sin\gamma = \frac{\|a-b\|}{2\varrho}$ (nach Kor. 126). Ist nun $\|a-b\| < 2\varrho$, so gibt es für γ genau zwei mögliche Werte im Intervall $(0,\pi)$. Da die Abbildung $K \setminus \{a,b\} \to (0,\pi)$, $c \mapsto \gamma(c)$ stetig ist, ist sie auf beiden Kreisbögen, die a mit b verbinden, konstant. (Ist $\|a-b\| = 2\varrho$, so ist $\sin\gamma = 1$ und daher $\gamma = \frac{\pi}{2}$.) Es bezeichne nun γ, γ' die Werte der Peripheriewinkel auf den beiden Kreisbögen. Wir wählen $K \cap M_{a,b} = \{c, c'\}$.



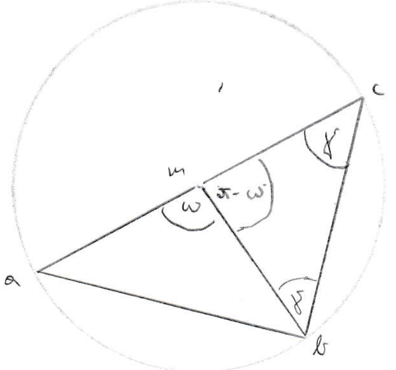
Dabei ist nach dem Satz von Thales $\varphi_{c-a,c'-a} = \varphi_{c-b,c'-b} = \frac{\pi}{2}$. Nach Satz 125 ist $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi$. Da $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \frac{\pi}{2}$ erhält man

$$2\pi = (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha'+\beta'+\gamma') = (\alpha+\alpha') + (\beta+\beta') + (\gamma+\gamma') = \pi + \gamma + \gamma'$$

und daher $\gamma + \gamma' = \pi$.

Korollar 157 (Zentriwinkelsatz) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kreis mit Mittelpunkt m und Radius ϱ. Weiters seien $a, b \in K$, $a \neq b$ und $\omega := \varphi_{a-m,b-m}$ (der Zentrumswinkel). Dann ist $\omega = 2\gamma$, wobei γ den kleineren der beiden Peripheriewinkel aus Satz 156 bezeichnet.

Beweis Es sei $c = 2m - a$ (d.h. $\{c\} = G(a,m) \cap K$) und γ der Peripheriewinkel auf dem Kreisbogen, auf dem c liegt.



Das Dreieck b, c, m ist gleichschenklig. Da $\gamma = \varphi_{a-c,b-c} = \varphi_{m-c,b-c} \overset{\text{Kor. 132}}{=} \varphi_{m-b,c-b}$ folgt (wegen Satz 125) $\pi - \omega + 2\gamma = \pi$, d.h. $\omega = 2\gamma$. Aus $2\gamma = \omega \leq \pi = \gamma + \gamma'$ erhält man $\gamma \leq \gamma'$.