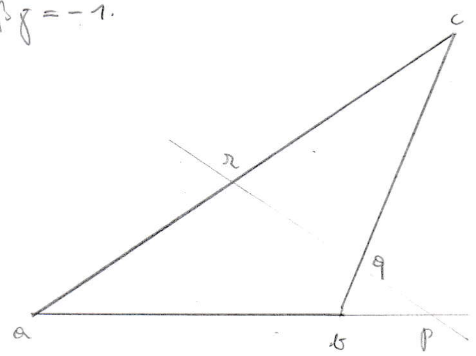
10. Dreiecke in der Ebene

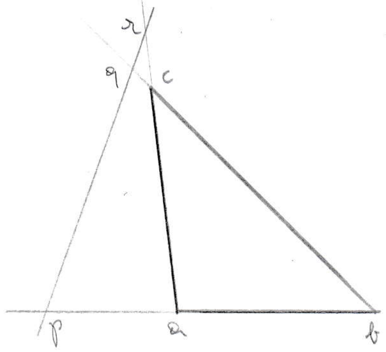
Definition: Drei paarweise verschiedene, nicht kollineare $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ werden Dreieck genannt. Dabei nennt man a,b,c die Ecken oder Eckpunkte des Dreiecks und die Geraden $G(a,b)$, $G(b,c)$ und $G(a,c)$ die Seiten des Dreiecks.

Satz 113 (Satz von MENELAUS) Es seien $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, $p \in G(a,b)$, $q \in G(b,c)$ und $r \in G(a,c)$, wobei $\{a,b,c\} \cap \{p,q,r\} = \emptyset$. Weiters seien $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, derart dass $r-c = \alpha(a-r)$, $p-a = \beta(b-p)$ und $q-b = \gamma(c-q)$. Dann sind äquivalent:

(i) p,q,r sind kollinear,

(ii) $\alpha\beta\gamma = -1$.





Beweis: $p-a = \beta(b-p) = \beta(b-a+a-p) = \beta(b-a) - \beta(p-a) \Rightarrow (1+\beta)(p-a) = \beta(b-a)$

$\Rightarrow p-a = \frac{\beta}{1+\beta}(b-a) \Rightarrow p = a + \frac{\beta}{1+\beta}(b-a)$ ($\beta \neq -1$, denn $\beta = -1 \Rightarrow p-a = p-b \Rightarrow a=b$, Wid.)

Völlig analog gelten: $r-c = \alpha(a-r) \Rightarrow r = c + \frac{\alpha}{1+\alpha}(a-c)$ und $q-b = \gamma(c-q) \Rightarrow q = b + \frac{\gamma}{1+\gamma}(c-b)$

$$\Rightarrow p-r = a + \frac{\beta}{1+\beta}(b-a) - c - \frac{\alpha}{1+\alpha}(a-c) = \frac{\beta}{1+\beta}(b-a) + \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)(a-c) = \frac{\beta}{1+\beta}(b-a) - \frac{1}{1+\alpha}(c-a)$$

und

$$q-r = b + \frac{\gamma}{1+\gamma}(c-b) - c - \frac{\alpha}{1+\alpha}(a-c) = \left(-1 + \frac{\gamma}{1+\gamma}\right)(c-b) + \frac{\alpha}{1+\alpha}(c-a) = -\frac{1}{1+\gamma}(c-b) + \frac{\alpha}{1+\alpha}(c-a)$$

$$= -\frac{1}{1+\gamma}\left((c-a)-(b-a)\right) + \frac{\alpha}{1+\alpha}(c-a) = \frac{1}{1+\gamma}(b-a) + \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} - \frac{1}{1+\gamma}\right)(c-a)$$

$$= \frac{1}{1+\gamma}(b-a) + \frac{\alpha + \alpha\gamma - 1 - \alpha}{(1+\alpha)(1+\gamma)}(c-a) = \frac{1}{1+\gamma}(b-a) + \frac{\alpha\gamma - 1}{(1+\alpha)(1+\gamma)}(c-a)$$

$$\Rightarrow \det(p-r, q-r) = \det\left(\frac{\beta}{1+\beta}(b-a) - \frac{1}{1+\alpha}(c-a), \frac{1}{1+\gamma}(b-a) + \frac{\alpha\gamma-1}{(1+\alpha)(1+\gamma)}(c-a)\right)$$

$$\overset{\text{Satz 37(i)}}{=} \frac{\beta}{1+\beta}\cdot\frac{1}{1+\gamma}\det(b-a,b-a) + \frac{\beta}{1+\beta}\cdot\frac{\alpha\gamma-1}{(1+\alpha)(1+\gamma)}\det(b-a,c-a)$$

$$- \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{1+\gamma}\det(c-a,b-a) - \frac{1}{1+\alpha}\cdot\frac{\alpha\gamma-1}{(1+\alpha)(1+\gamma)}\det(c-a,c-a)$$

$$\overset{\text{Satz 38(ii), Satz 39(i)}}{=} \frac{\alpha\beta\gamma - \beta + 1 + \beta}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\det(b-a,c-a) = \frac{\alpha\beta\gamma + 1}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\det(b-a,c-a)$$

Da a,b,c nicht kollinear sind, ist $\det(b-a,c-a) \neq 0$ und daher

p,q,r sind kollinear $\Leftrightarrow \det(p-r,q-r) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = -1$

28.5.2024

Lemma 114 Für $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ gelten:

(i) $\langle a+b, a-b\rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2$,

(ii) $\langle a^\perp, b^\perp\rangle = \langle a,b\rangle$,

(iii) $\langle a, b^\perp\rangle = -\det(a,b)$ und $\langle a^\perp, b\rangle = \det(a,b)$,

(iv) $\det(a^\perp, b) = -\langle a,b\rangle$, und $\det(a,b^\perp) = \langle a,b\rangle$,

(v) $\det(a^\perp, b^\perp) = \det(a,b)$,

(vi) $\det(b-a, c-a) = \det(a,b) - \det(a,c) + \det(b,c)$.

Beweis: (i) $\langle a+b, a-b\rangle = \langle a,a\rangle + \langle b,a\rangle - \langle a,b\rangle - \langle b,b\rangle = \|a\|^2 - \|b\|^2$

(ii) Ist $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, so $\langle a^\perp, b^\perp\rangle = (-a_2)(-b_2) + a_1 b_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \langle a,b\rangle$

(iii) $\langle a, b^\perp\rangle = a_1(-b_2) + a_2 b_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\det(a,b)$

$\langle a^\perp, b\rangle = \langle b, a^\perp\rangle = -\det(b,a) = \det(a,b)$

(iv) $\det(a^\perp, b) = \begin{vmatrix} -a_2 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} = -a_2 b_2 - a_1 b_1 = -(a_1 b_1 + a_2 b_2) = -\langle a,b\rangle$

$\det(a, b^\perp) = -\det(b^\perp, a) = -(-\langle b,a\rangle) = \langle a,b\rangle$

(v) $\det(a^\perp, b^\perp) \overset{(iv)}{=} -\langle a, b^\perp\rangle \overset{(iii)}{=} -(-\det(a,b)) = \det(a,b)$

(vi) $\det(b-a, c-a) = \det(b,c) - \det(b,a) - \det(a,c) + \det(a,a) = \det(a,b) - \det(a,c) + \det(b,c)$.

Satz 115 Es seien $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ und $u,v,w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann sind äquivalent:

(i) Die drei Geraden $G_{a,u}, G_{b,v}, G_{c,w} \subseteq \mathbb{R}^2$ sind entweder alle parallel zueinander oder schneiden einander in einem Punkt,

(ii) $\det(c,w)\cdot\det(u,v) + \det(a,u)\cdot\det(v,w) + \det(b,v)\cdot\det(w,u) = 0$.

Beweis: 1. Fall Die drei Geraden sind parallel zueinander. Dann ist (i) erfüllt und (ii) folgt aus $\det(u,v) = \det(v,w) = \det(w,u) = 0$.

2. Fall Die drei Geraden sind nicht alle parallel zueinander und oBdA $G_{a,u} \nparallel G_{b,v}$.
Dann ist $\det(u,v) \neq 0$ und nach Satz 98 ist $G_{a,u} \cap G_{b,v} = \{s\}$ mit

$$s = \frac{1}{\det(u,v)}\left(\det(b,v)\cdot u - \det(a,u)\cdot v\right) \quad \text{und es folgt}$$

$$s \in G_{c,w} \iff \langle s, w^\perp\rangle = \langle c, w^\perp\rangle \overset{\text{Lemma 114 (iii)}}{\iff} \det(s,w) = \det(c,w)$$

$$\iff \det(c,w) = \det\left(\frac{1}{\det(u,v)}\left(\det(b,v)\cdot u - \det(a,u)\cdot v\right), w\right)$$

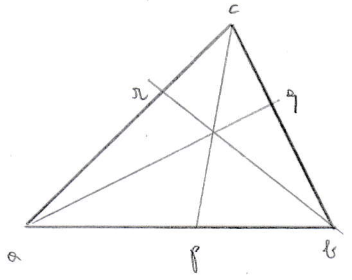
$$= \frac{1}{\det(u,v)}\left(\det(b,v)\cdot\det(u,w) - \det(a,u)\cdot\det(v,w)\right)$$

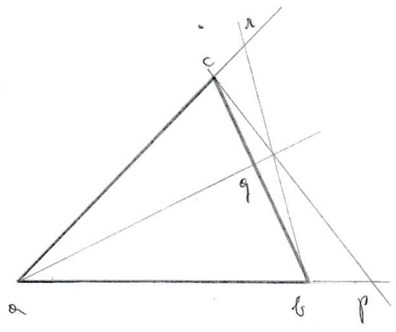
$$\iff \det(c,w)\cdot\det(u,v) + \det(a,u)\cdot\det(v,w) + \det(b,v)\cdot\det(w,u) = 0$$

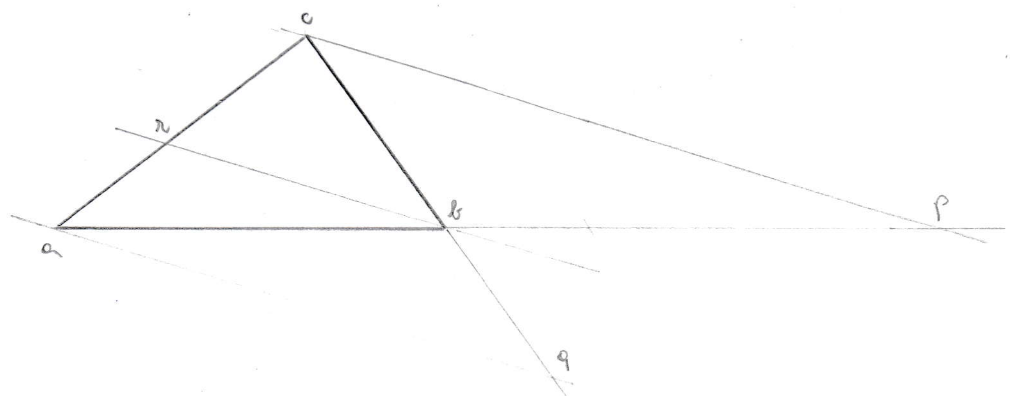
Satz 116 (Satz von CEVA) Es seien $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, $p \in G(a,b)$, $q \in G(b,c)$ und $r \in G(a,c)$, wobei $\{a,b,c\} \cap \{p,q,r\} = \emptyset$. Weiters seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, derart dass $r - c = \alpha(a-r)$, $p - a = \beta(b-p)$ und $q - b = \gamma(c-q)$. Dann sind äquivalent:

(i) $G(a,q)$, $G(b,r)$ und $G(c,p)$ schneiden einander in einem Punkt oder sind parallel zueinander,

(ii) $\alpha\beta\gamma = 1$.







Beweis: Wie im Beweis von Satz 113 zeigt man $p = a + \frac{\beta}{1+\beta}(b-a) = \frac{1}{1+\beta}(a + \beta b)$ (wobei $\beta \neq -1$) und völlig analog $q = b + \frac{\gamma}{1+\gamma}(c-b) = \frac{1}{1+\gamma}(b + \gamma c)$ und $r = c + \frac{\alpha}{1+\alpha}(a-c) = \frac{1}{1+\alpha}(c + \alpha a)$

Um Satz 115 auf die drei Geraden $G_{a,q-a}$, $G_{b,r-b}$ und $G_{c,p-c}$ anzuwenden, berechnen wir

$$\det(c, p-c) = \det(c,p) = \det\left(c, \frac{1}{1+\beta}(a+\beta b)\right) = \frac{1}{1+\beta}\det(c, a+\beta b)$$

und

$$\det(q-a, r-b) = \det\left(b - a + \frac{\gamma}{1+\gamma}(c-b),\ c - b + \frac{\alpha}{1+\alpha}(a-c)\right)$$

$$= \det\left(b - a + \frac{\gamma}{1+\gamma}(c-a) - \frac{\gamma}{1+\gamma}(b-a),\ c - a - (b-a) - \frac{\alpha}{1+\alpha}(c-a)\right)$$

$$= \det\left(\frac{1}{1+\gamma}(b-a) + \frac{\gamma}{1+\gamma}(c-a),\ -(b-a) + \frac{1}{1+\alpha}(c-a)\right)$$

$$= \left(\frac{\gamma}{1+\gamma} + \frac{1}{(1+\alpha)(1+\gamma)}\right)\det(b-a, c-a) = \frac{\alpha\gamma + \gamma + 1}{(1+\alpha)(1+\gamma)}\det(b-a, c-a)$$

$$\Rightarrow \det(c, p-c)\cdot\det(q-a, r-b) = \frac{\alpha\gamma + \gamma + 1}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\det(c, a+\beta b)\cdot\det(b-a, c-a)$$

Völlig analog zeigt man

$$\det(a, q-a)\cdot\det(r-b, p-c) = \frac{\alpha\beta+\alpha+1}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\det(a, b+\gamma c)\cdot\det(b-a, c-a)$$

und

$$\det(b, r-b)\cdot\det(p-c, q-a) = \frac{\beta\gamma+\beta+1}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\det(b, c+\alpha a)\cdot\det(b-a, c-a)$$

$$\Rightarrow \det(c,p-c)\cdot\det(q-a,r-b) + \det(a,q-a)\cdot\det(r-b,p-c) + \det(b,r-b)\cdot\det(p-c,q-a)$$

$$= \Big((\alpha\gamma+\gamma+1)\det(c,a+\beta b) + (\alpha\beta+\alpha+1)\det(a,b+c\gamma) + (\beta\gamma+\beta+1)\det(b,c+\alpha a)\Big)\cdot\frac{\det(b-a,c-a)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

$$= \Big(\big(\alpha\beta+\alpha+1-\alpha(\beta\gamma+\beta+1)\big)\det(a,b) + \big(-(\alpha\gamma+\gamma+1)+\gamma(\alpha\beta+\alpha+1)\big)\det(a,c)$$
$$+ \big(-\beta(\alpha\gamma+\gamma+1)+\beta\gamma+\beta+1\big)\det(b,c)\Big)\cdot\frac{\det(b-a,c-a)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

$$= \Big((1-\alpha\beta\gamma)\det(a,b) + (\alpha\beta\gamma-1)\det(a,c) + (1-\alpha\beta\gamma)\det(b,c)\Big)\cdot\frac{\det(b-a,c-a)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}$$

$$= \frac{1-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\Big(\det(a,b)-\det(a,c)+\det(b,c)\Big)\det(b-a,c-a) \overset{\text{Lemma 114(vi)}}{=} \frac{1-\alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}\Big(\det(b-a,c-a)\Big)^2$$

Da $b-a, c-a$ l.u. sind, ist $\det(b-a,c-a)\neq 0$ und daher

$$\det(c,p-c)\cdot\det(q-a,r-b) + \det(a,q-a)\cdot\det(r-b,p-c) + \det(b,r-b)\cdot\det(p-c,q-a) = 0$$

$\iff 1-\alpha\beta\gamma = 0 \iff \alpha\beta\gamma = 1$. Die Beh. folgt aus Satz 115.

<u>Def.</u>: Es sei $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Die drei Verbindungsgeraden, die eines seiner Eckpunkte mit dem Mittelpunkt der beiden jeweils anderen verbindet, werden Seitenhalbierende genannt.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Die drei Seitenhalbierenden des Dreiecks a,b,c sind also die Geraden $S_a := G(a,\frac{1}{2}(b+c)) = G_{a,\frac{1}{2}(b+c)-a} = G_{a,b+c-2a}$, $S_b := G_{b,a+c-2b}$ und $S_c := G_{c,a+b-2c}$.

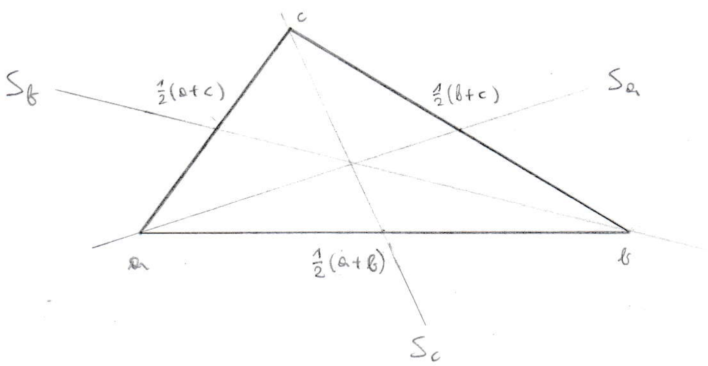
2) Dabei ist z.B. $b+c-2a\neq o$. (Wäre $b+c-2a=o$, so würde aus Korollar 95 folgen, dass a,b,c kollinear sind, Wid.) Analog ist $a+c-2b\neq o$ und $a+b-2c\neq o$

3) Die drei Geraden S_a, S_b, S_c sind nicht parallel zueinander. (Wären z.B. S_a und S_b parallel, so würde es ein $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ geben, sodass $b+c-2a = \alpha(a+c-2b)$ $\Rightarrow (2+\alpha)a-(2\alpha+1)b+(\alpha-1)c = o$ und a,b,c wären kollinear nach Kor. 95, Wid.)

Satz 117 (Schwerpunkt eines Dreiecks) Ist $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so gilt $S_a\cap S_b\cap S_c=\{s\}$ (d.h. die drei Seitenhalbierenden schneiden einander in einem Punkt), wobei $s=\frac{1}{3}(a+b+c)$ als Schwerpunkt des Dreiecks a,b,c bezeichnet wird. Der Schwerpunkt teilt dabei die Strecke von einem Eckpunkt zum Mittelpunkt der beiden anderen Seiten im Verhältnis 2:1.

Beweis: Anwendung des Satzes von Ceva mit $p=\frac{1}{2}(a+b)$, $q=\frac{1}{2}(b+c)$ und $r=\frac{1}{2}(a+c)$ ergibt $\alpha=\beta=\gamma=1$ und daher $\alpha\beta\gamma=1$. Da die drei Seitenhalbierenden nach Bemerkung 3) nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in einem Punkt s. Die restlichen Behauptungen folgen aus

$$a+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(b+c)-a\right)=b+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(a+c)-b\right)=c+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(a+b)-c\right)=\frac{1}{3}(a+b+c).$$



3.6.2024

Def.: Es sei $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Die drei Geraden, die durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehen und orthogonal auf die Gerade durch die beiden jeweils anderen sind, werden die Höhen des Dreiecks genannt.

Bemerkungen: 1) Die drei Höhen des Dreiecks a,b,c sind also die Geraden $H_a=G_{a,(b-c)^\perp}$, $H_b=G_{b,(a-c)^\perp}$ und $H_c=G_{c,(a-b)^\perp}$.

2) Die Gleichungen der Höhen sind folglich:

$H_a: \langle x,c-b\rangle=\langle a,c-b\rangle$, $H_b: \langle x,c-a\rangle=\langle b,c-a\rangle$ und $H_c: \langle x,b-a\rangle=\langle c,b-a\rangle$

3) Die Höhen eines Dreiecks sind nicht parallel. Wäre z.B. $H_a\parallel H_b$, so würde es ein $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ geben, sodass $(b-c)^\perp=\alpha(a-c)^\perp$ und daher $b-c=\alpha(a-c)$ und $\alpha a-b+(1-\alpha)c=0$, d.h. a,b,c wären kollinear, Wid.

Satz 118 (Höhenschnittpunkt eines Dreiecks) Ist $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so gilt $H_a\cap H_b\cap H_c=\{h\}$ (d.h. die drei Höhen schneiden einander in einem Punkt), wobei

$$h=\frac{1}{\det(b-a,c-a)}\left(\langle a,b-c\rangle a^\perp+\langle b,c-a\rangle b^\perp+\langle c,a-b\rangle c^\perp\right)$$ und

$$h_a:=d(a,G(b,c))=\frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|c-b\|},\quad h_b:=d(b,G(a,c))=\frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|c-a\|},\quad h_c:=d(c,G(a,b))=\frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|b-a\|}$$

Die Größen h_a,h_b und h_c werden als Längen der Höhen bezeichnet

Beweis: Es sei $\{h\} = H_a \cap H_b$. Dann gelten $\langle h, c-b\rangle = \langle a, c-b\rangle$ und $\langle h, c-a\rangle = \langle b, c-a\rangle$

$$\Rightarrow \langle h, b-a\rangle = \langle h, (c-a)-(c-b)\rangle = \langle h, c-a\rangle - \langle h, c-b\rangle = \langle b, c-a\rangle - \langle a, c-b\rangle$$

$$= \langle c,b\rangle - \langle a,b\rangle - \langle c,a\rangle + \langle a,b\rangle = \langle c, b-a\rangle,$$ d.h. $h \in H_c$ und $H_a \cap H_b \cap H_c = \{h\}$.

Wir berechnen $\{h\} = H_c \cap H_b = G_{c,(b-a)^\perp} \cap G_{b,(c-a)^\perp}$ mit Hilfe von Satz 98:

$$h = \frac{1}{\det\left((b-a)^\perp, (c-a)^\perp\right)} \left(\det(b,(c-a)^\perp)\cdot(b-a)^\perp - \det(c,(b-a)^\perp)\cdot(c-a)^\perp\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 114}}{=} \frac{1}{\det(b-a,c-a)} \left(\langle b, c-a\rangle (b^\perp - a^\perp) - \langle c, b-a\rangle (c^\perp - a^\perp)\right)$$

$$= \frac{1}{\det(b-a,c-a)} \left((\langle c, b-a\rangle - \langle b, c-a\rangle)a^\perp + \langle b, c-a\rangle b^\perp + \langle c, a-b\rangle c^\perp\right)$$

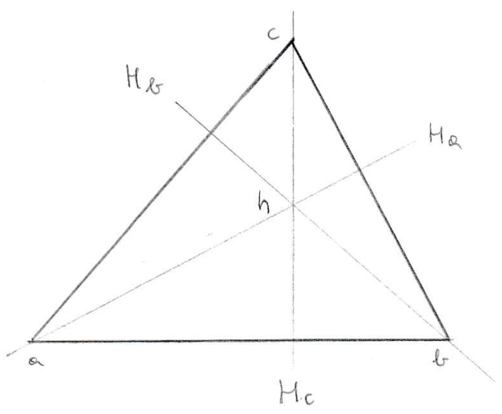
$$= \frac{1}{\det(b-a,c-a)} \left((\langle b,c\rangle - \langle a,c\rangle - \langle b,c\rangle + \langle a,b\rangle)a^\perp + \langle b, c-a\rangle b^\perp + \langle c, a-b\rangle c^\perp\right)$$

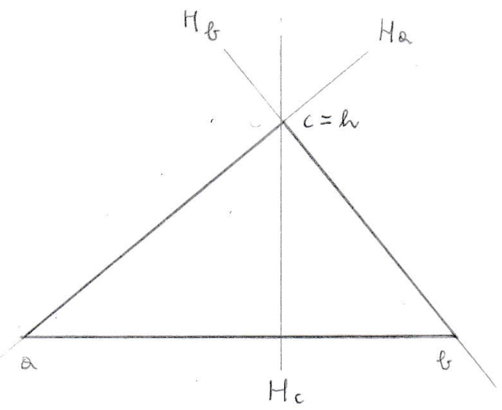
$$= \frac{1}{\det(b-a,c-a)} \left(\langle a, b-c\rangle a^\perp + \langle b, c-a\rangle b^\perp + \langle c, a-b\rangle c^\perp\right)$$

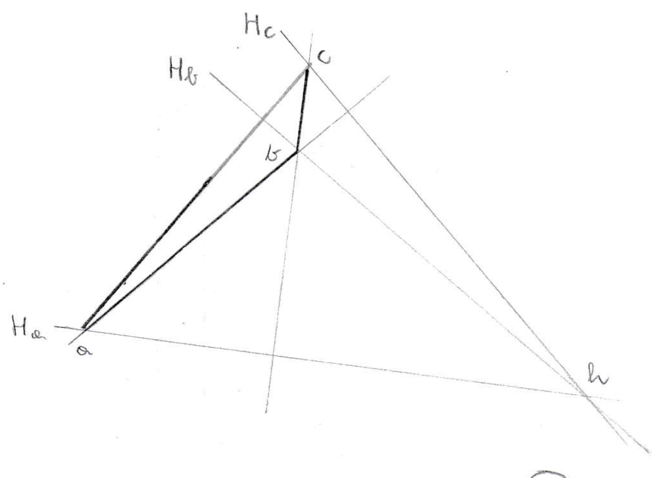
Schließlich ist

$$h_a = d(a, G(b,c)) = d(a, G_{b,c-b}) \overset{\text{Satz 110}}{=} \frac{|\langle a-b, (c-b)^\perp\rangle|}{\|c-b\|} \overset{\text{Lemma 114}}{=} \frac{|\det(b-a, c-b)|}{\|c-b\|}$$

$$\overset{\text{Satz 40(i)}}{=} \frac{|\det(b-a, c-b+b-a)|}{\|c-b\|} = \frac{|\det(b-a, c-a)|}{\|c-b\|}$$ (und analog für h_b und h_c).







Satz 119 (i) Ist $G_{a,v} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade und $T_u \in \mathcal{T}_2$ eine Translation, so ist $T_u(G_{a,v}) = G_{a+u,v}$ ebenfalls eine Gerade.

(ii) Sind $G_{a,v}, G_{b,w} \subseteq \mathbb{R}^2$ zwei Geraden, wobei $G_{a,v} \nparallel G_{b,w}$, und $T_u \in \mathcal{T}_2$, so ist $T_u(G_{a,v} \cap G_{b,w}) = T_u(G_{a,u}) \cap T_u(G_{b,w})$.

Beweis: (i) $T_u(G_{a,v}) = T_u(a + \mathbb{R}v) = a + u + \mathbb{R}v = T_{a+u,v}$

(ii) Ist $G_{a,v} \cap G_{b,w} = \{s\}$ und $s = a + \alpha v = b + \beta w$ für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist

$T_u(s) = a + u + \alpha v = b + u + \beta w \in G_{a+u,v} \cap G_{b+u,w} = T_u(G_{a,v}) \cap T_u(G_{b,w})$

Da $G_{a+u,v} \nparallel G_{b+u,w}$ ist $T_u(G_{a,v}) \cap T_u(G_{b,w}) = \{T_u(s)\} = T_u(G_{a,v} \cap G_{b,w})$

Def.: Es sei $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Die drei Geraden, die durch den Mittelpunkt einer Seite gehen und orthogonal zu dieser Seite stehen, werden Mittelsenkrechte genannt.

Bemerkungen: 1) Die drei Mittelsenkrechten des Dreiecks a, b, c sind also die Geraden $M_{a,b} := G_{\frac{1}{2}(a+b),(a-b)^\perp}$, $M_{b,c} := G_{\frac{1}{2}(b+c),(b-c)^\perp}$ und $M_{a,c} := G_{\frac{1}{2}(a+c),(a-c)^\perp}$

2) Die Gleichungen der Mittelsenkrechten sind folglich:

$M_{a,b}: \langle x, b-a \rangle = \langle \frac{1}{2}(a+b), b-a \rangle$, $M_{b,c}: \langle x, c-b \rangle = \langle \frac{1}{2}(b+c), c-b \rangle$

und $M_{a,c}: \langle x, c-a \rangle = \langle \frac{1}{2}(a+c), c-a \rangle$

3) Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks sind nicht parallel. (Das zeigt man ganz genauso wie bei den Höhen.)

Lemma 120: Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so ist $M_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| = \|x-b\|\}$, $M_{b,c} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-b\| = \|x-c\|\}$ und $M_{a,c} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| = \|x-c\|\}$.

Beweis: $\|x-a\| = \|x-b\| \Leftrightarrow \|x-a\|^2 = \|x-b\|^2 \Leftrightarrow \langle x-a, x-a \rangle = \langle x-b, x-b \rangle$

$\Leftrightarrow \langle x, x \rangle - 2\langle x, a \rangle + \langle a, a \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, b \rangle + \langle b, b \rangle$

$\Leftrightarrow 2\langle x, b-a \rangle = \langle b, b \rangle - \langle a, a \rangle = \|b\|^2 - \|a\|^2 \overset{\text{Lemma 114(i)}}{=} \langle a+b, b-a \rangle$

$\Leftrightarrow \langle x, b-a \rangle = \langle \frac{1}{2}(a+b), b-a \rangle$

Satz 121 (Umkreismittelpunkt eines Dreiecks) Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so gilt $M_{a,b} \cap M_{b,c} \cap M_{a,c} = \{m\}$ (d.h. die drei Mittelsenkrechten schneiden einander in einem Punkt), wobei

$$m = \frac{1}{2\det(b-a, c-a)} \left((\|b\|^2 - \|c\|^2) a^\perp + (\|c\|^2 - \|a\|^2) b^\perp + (\|a\|^2 - \|b\|^2) c^\perp \right)$$

und

$$\|m-a\| = \|m-b\| = \|m-c\| = \frac{\|a-b\|\cdot\|b-c\|\cdot\|c-a\|}{2\,|\det(b-a,c-a)|} \quad (\text{Umkreisradius})$$

<u>Beweis</u>: Es sei $\{m\} = M_{a,b} \cap M_{b,c}$. Dann $\|m-a\| = \|m-b\| = \|m-c\|$ und daher $m \in M_{a,c}$.

Wir berechnen $\{m\} = G_{\frac{1}{2}(a+b),(b-a)^\perp} \cap G_{\frac{1}{2}(a+c),(c-a)^\perp}$ mit Hilfe von Satz 98:

$$m = \frac{1}{\det((b-a)^\perp,(c-a)^\perp)}\left(\det\left(\tfrac{1}{2}(a+c),(c-a)^\perp\right)\cdot(b-a)^\perp - \det\left(\tfrac{1}{2}(a+b),(b-a)^\perp\right)\cdot(c-a)^\perp\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 114 (v)}}{=} \frac{1}{2\det(b-a,c-a)}\left(\det(a+c,(c-a)^\perp)\cdot(b-a)^\perp - \det(a+b,(b-a)^\perp)\cdot(c-a)^\perp\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 114 (iv)}}{=} \frac{1}{2\det(b-a,c-a)}\left(\langle a+c,c-a\rangle\cdot(b-a)^\perp - \langle a+b,b-a\rangle\cdot(c-a)^\perp\right)$$

$$\overset{\text{Lemma 114 (i)}}{=} \frac{1}{2\det(b-a,c-a)}\left(\left(\|c\|^2-\|a\|^2\right)\left(b^\perp-a^\perp\right) - \left(\|b\|^2-\|a\|^2\right)\left(c^\perp-a^\perp\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\det(b-a,c-a)}\left(\left(\|a\|^2-\|c\|^2+\|b\|^2-\|a\|^2\right)a^\perp + \left(\|c\|^2-\|a\|^2\right)b^\perp + \left(\|a\|^2-\|b\|^2\right)c^\perp\right)$$

$$= \frac{1}{2\det(b-a,c-a)}\left(\left(\|b\|^2-\|c\|^2\right)a^\perp + \left(\|c\|^2-\|a\|^2\right)b^\perp + \left(\|a\|^2-\|b\|^2\right)c^\perp\right)$$

4.6.2024

Für die letzte Behauptung zeigen wir zunächst den Spezialfall $a=0$: Dann ist

$$m = \frac{1}{2\det(b,c)}\left(\|c\|^2 b^\perp - \|b\|^2 c^\perp\right)$$ und daher

$$\|m\|^2 = \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\left\|\,\|c\|^2 b^\perp - \|b\|^2 c^\perp\right\|^2 = \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\left\|\,\|c\|^2 b - \|b\|^2 c\right\|^2$$

$$= \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\left\langle \|c\|^2 b - \|b\|^2 c,\ \|c\|^2 b - \|b\|^2 c\right\rangle$$

$$= \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\left(\|c\|^4\langle b,b\rangle - 2\|b\|^2\|c\|^2\langle b,c\rangle + \|b\|^4\langle c,c\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\left(\|c\|^4\cdot\|b\|^2 - 2\|b\|^2\|c\|^2\langle b,c\rangle + \|b\|^4\cdot\|c\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\|b\|^2\|c\|^2\left(\|c\|^2 - 2\langle b,c\rangle + \|b\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{4(\det(b,c))^2}\|b\|^2\|c\|^2\|c-b\|^2$$

und daher

$$\|m\| = \frac{\|b\|\cdot\|c\|\cdot\|b-c\|}{2\,|\det(b,c)|}$$

Für den allgemeinen Fall wende die Translation T_{-a} an. Es sei
$a' = T_{-a}(a) = 0$, $b' = T_{-a}(b) = b-a$ und $c' = T_{-a}(c) = c-a$.
Dabei werden auch die Mittelpunkte aufeinander abgebildet, d.h.

$$T_{-a}\left(\tfrac{1}{2}(a+b)\right) = \tfrac{1}{2}(a+b)-a = \tfrac{1}{2}(b-a) = \tfrac{1}{2}b' \quad \left(= \tfrac{1}{2}(a'+b')\right)$$

$$T_{-a}\left(\tfrac{1}{2}(b+c)\right) = \tfrac{1}{2}(b+c)-a = \tfrac{1}{2}(b+c-2a) = \tfrac{1}{2}(b-a+c-a) = \tfrac{1}{2}(b'+c')$$

$$T_{-a}\left(\tfrac{1}{2}(a+c)\right) = \tfrac{1}{2}(a+c)-a = \tfrac{1}{2}(c-a) = \tfrac{1}{2}c' \quad \left(= \tfrac{1}{2}(a'+c')\right)$$

sowie $T_{-a}(M_{a,b}) = M_{a',b'}$, $T_{-a}(M_{b,c}) = M_{b',c'}$ und $T_{-a}(M_{a,c}) = M_{a',c'}$.
Setzt man $\{m'\} = M_{a',b'} \cap M_{b',c'} \cap M_{a',c'}$, so gilt wegen Satz 119 (ii)

$$\{m-a\} = T_{-a}(\{m\}) = T_{-a}(M_{a,b} \cap M_{b,c} \cap M_{a,c})$$

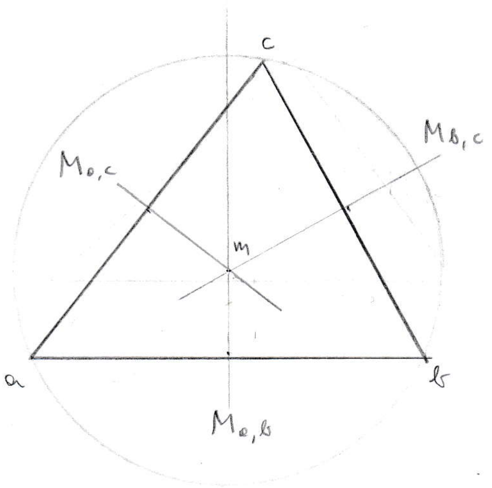
$$= T_{-a}(M_{a,b}) \cap T_{-a}(M_{b,c}) \cap T_{-a}(M_{a,c}) = M_{a',b'} \cap M_{b',c'} \cap M_{a',c'} = \{m'\}$$

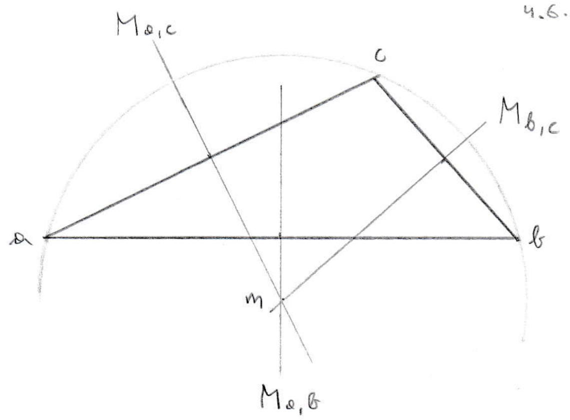
und daher $m' = m-a$. Es folgt

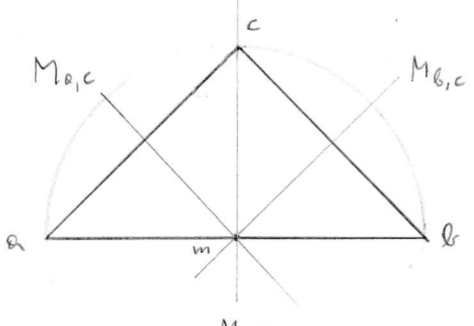
$$\|m-a\| = \|m'\| = \frac{\|b'\| \cdot \|c'\| \cdot \|b'-c'\|}{2\,|\det(b',c')|} = \frac{\|b-a\| \cdot \|c-a\| \cdot \|(b-a)-(c-a)\|}{2\,|\det(b-a,c-a)|}$$

$$= \frac{\|a-b\| \cdot \|b-c\| \cdot \|c-a\|}{2\,|\det(b-a,c-a)|}$$

4.6.2024







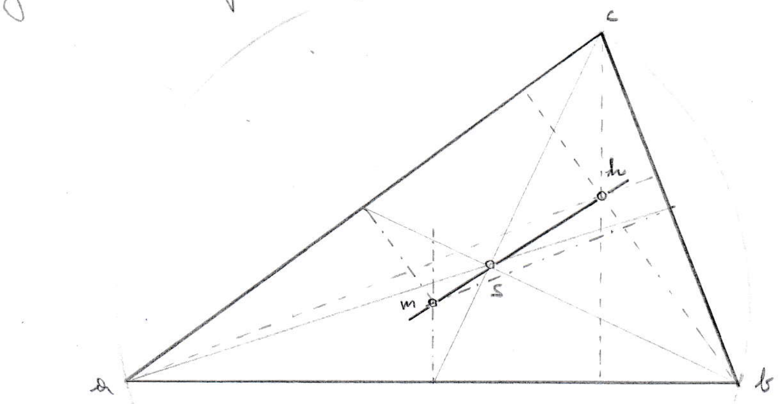
4.6.2024

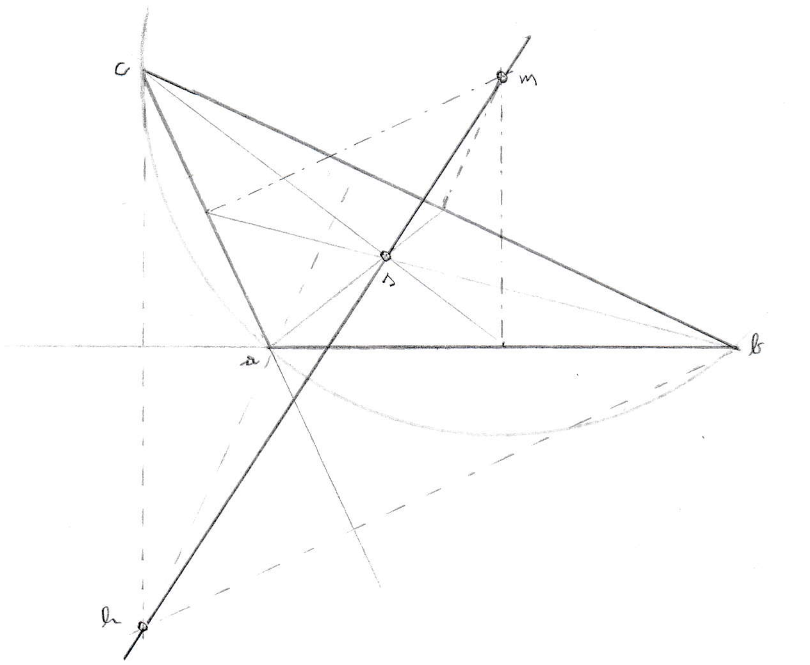
Satz 122 (EULER-Gerade eines Dreiecks) Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Schwerpunkt s, Höhenschnittpunkt h und Umkreismittelpunkt m, so gilt $3s = h + 2m$. Insbesondere liegen s, h und m auf einer Geraden (der EULER-Geraden des Dreiecks), sofern die drei Punkte s, h und m nicht zusammenfallen (dh $s = h = m$).

Beweis: Wir zeigen zuerst den Spezialfall $m = 0$, dh $\|a\| = \|b\| = \|c\|$.

Wegen $\langle 3s - a, c - b \rangle = \langle (a+b+c) - a, c - b \rangle = \langle b + c, c - b \rangle = \|c\|^2 - \|b\|^2 = 0$ gilt $3s \in H_a$. Völlig analog zeigt man $3s \in H_b$ und $3s \in H_c$. Also ist $3s = h$.

Für den allgemeinen Fall wende die Translation T_{-m} an. Man erhält das Dreieck $a' = a - m$, $b' = b - m$, $c' = c - m$ mit Schwerpunkt $s' = s - m$, Höhenschnittpunkt $h' = h - m$ und Umkreismittelpunkt $m - m = 0$. Aus dem schon bewiesenen Spezialfall folgt $3s - 3m = 3(s - m) = 3s' = h' = h - m \Rightarrow 3s = h + 2m$. Wegen Kor. 95 liegen s, h, m auf einer Geraden.





Lemma 123 Für $x,y \in \mathbb{R}^2$ gilt $\langle x,y\rangle^2 + (\det(x,y))^2 = \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle = \|x\|^2 \|y\|^2$.

Beweis: Ist $x = \binom{x_1}{x_2}$, $y = \binom{y_1}{y_2}$, so ist

$$\langle x,y\rangle^2 + (\det(x,y))^2 = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$$

$$= x_1^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2$$

$$= x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 = (x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2) = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

Def.: Sind $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so definiert man $\varphi = \varphi_{x,y}$ als den eindeutig bestimmten Winkel mit den Eigenschaften $\cos\varphi = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$ und $0 \le \varphi \le \pi$ (siehe Seite 57).

Lemma 124 Es seien $x,y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gelten

(i) $\varphi_{x,y} = \varphi_{y,x} = \varphi_{-x,-y}$,

(ii) $\varphi_{x,-y} = \pi - \varphi_{x,y}$,

(iii) $x = y$ oder x,y l.a. $\iff \varphi_{x,y} \in \{0,\pi\}$,

(iv) x,y sind orthogonal $\iff \varphi_{x,y} = \frac{\pi}{2}$,

(v) $\sin\varphi_{x,y} = \frac{|\det(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Beweis: (i) Folgt aus $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = \langle -x,-y\rangle$

(ii) Folgt aus $\cos\varphi_{x,-y} = \frac{\langle x,-y\rangle}{\|x\|\cdot\|-y\|} = -\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = -\cos\varphi_{x,y} = \cos(\pi - \varphi_{x,y})$

(iii) $x = y$ oder x,y l.a. $\overset{\text{Kor. 61}}{\iff} |\langle x,y\rangle| = \|x\|\cdot\|y\| \iff \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\|\cdot\|y\|} = 1$

$$\iff \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} \in \{1,-1\} \iff \cos\varphi_{x,y} \in \{1,-1\} \iff \varphi_{x,y} \in \{0,\pi\}$$

(iv) x,y orthogonal $\iff \langle x,y\rangle = 0 \iff \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|} = 0 \iff \cos\varphi_{x,y} = 0 \iff \varphi_{x,y} = \frac{\pi}{2}$

(v) $\cos^2\varphi_{x,y} + \sin^2\varphi_{x,y} = 1 \overset{\text{Lemma 123}}{=} \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2\|y\|^2} + \frac{(\det(x,y))^2}{\|x\|^2\|y\|^2}$

Da $\cos^2\varphi_{x,y} = \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2\|y\|^2}$ folgt $\sin^2\varphi_{x,y} = \frac{(\det(x,y))^2}{\|x\|^2\|y\|^2}$ und daher

(da $\sin\varphi \ge 0$ für $0 \le \varphi \le \pi$) $\sin\varphi_{x,y} = \frac{|\det(x,y)|}{\|x\|\cdot\|y\|}$

Def.: Ist $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so definiert man $\alpha = \varphi_{b-a,c-a}$, $\beta = \varphi_{c-b,a-b}$ und $\gamma = \varphi_{a-c,b-c}$ als die Winkel des Dreiecks und bezeichnet $\|a-b\|$, $\|b-c\|$ und $\|a-c\|$ als die Seitenlängen des Dreiecks. [**Bemerkung:** Wegen Lemma 124 (iii) gilt $0 < \alpha,\beta,\gamma < \pi$.

Def.: Ein Dreieck heißt gleichseitig, wenn alle drei Seitenlängen gleich sind bzw. gleichschenklig, wenn zwei Seitenlängen gleich sind.

Satz 125 (Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°) Ist $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Winkeln $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ so ist $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Beweis: Es ist $\cos\alpha = \dfrac{\langle b-a, c-a\rangle}{\|b-a\|\cdot\|c-a\|}$, $\sin\alpha = \dfrac{|\det(b-a,c-a)|}{\|b-a\|\cdot\|c-a\|}$,

$$\cos\beta = \frac{\langle c-b, a-b\rangle}{\|b-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\langle (c-a)-(b-a), a-b\rangle}{\|b-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\langle c-a, a-b\rangle - \langle b-a, a-b\rangle}{\|b-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\|b-a\|^2 - \langle b-a, c-a\rangle}{\|b-a\|\cdot\|c-b\|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\langle a-c, b-c\rangle}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\langle a-c, (b-a)-(c-a)\rangle}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\langle a-c, b-a\rangle - \langle a-c, c-a\rangle}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\|c-a\|^2 - \langle b-a, c-a\rangle}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|},$$

$$\sin\beta = \frac{|\det(c-b,a-b)|}{\|b-a\|\,\|c-b\|} = \frac{|\det(c-b-(a-b),a-b)|}{\|b-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{|\det(c-a,a-b)|}{\|b-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|b-a\|\,\|c-b\|} \quad \text{und}$$

$$\sin\gamma = \frac{|\det(a-c,b-c)|}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{|\det(a-c,b-c-(a-c))|}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{|\det(a-c,b-a)|}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{\langle b-a,c-a\rangle\left(\|b-a\|^2 - \langle b-a,c-a\rangle\right) - \left(\det(b-a,c-a)\right)^2}{\|b-a\|^2\cdot\|c-a\|\cdot\|c-b\|}$$

$$= \frac{\langle b-a,c-a\rangle\|b-a\|^2 - \langle b-a,c-a\rangle^2 - \left(\det(b-a,c-a)\right)^2}{\|b-a\|^2\cdot\|c-a\|\cdot\|c-b\|}$$

$$\overset{\text{Lemma 123}}{=} \frac{\langle b-a,c-a\rangle\|b-a\|^2 - \|b-a\|^2\cdot\|c-a\|^2}{\|b-a\|^2\cdot\|c-a\|\cdot\|c-b\|} = \frac{\langle b-a,c-a\rangle - \|c-a\|^2}{\|c-a\|\cdot\|c-b\|}$$

$$= -\cos\gamma = \cos(\pi-\gamma) \quad \text{und}$$

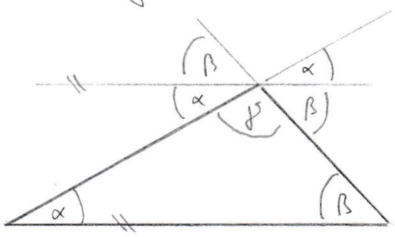
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{|\det(b-a,c-a)|\left(\|b-a\|^2 - \langle b-a,c-a\rangle\right) + \langle b-a,c-a\rangle\,|\det(b-a,c-a)|}{\|b-a\|^2\,\|c-a\|\cdot\|c-b\|}$$

$$= \frac{|\det(b-a,c-a)|\cdot\|b-a\|^2}{\|b-a\|^2\,\|c-a\|\,\|c-b\|} = \frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|c-a\|\,\|c-b\|} = \sin\gamma = \sin(\pi-\gamma)$$

Da $0 < \alpha+\beta, \pi-\gamma < 2\pi$ folgt $\alpha+\beta = \pi-\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Bemerkung: Ganz ohne Rechnung beweist man Satz 125 durch die folgende Überlegung:



5.6.2024

Def.: Ein Dreieck $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ mit Winkeln α, β, γ heißt
- spitzwinklig wenn $\alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$,
- rechtwinklig wenn einer der Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist,
- stumpfwinklig wenn einer der Winkel $> \frac{\pi}{2}$ ist.

Bemerkung: Wegen Satz 125 kann höchstens einer der Winkel eines Dreiecks $= \frac{\pi}{2}$ (bzw $> \frac{\pi}{2}$) sein. Ist oBdA $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (bzw $\gamma > \frac{\pi}{2}$) folgt $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (bzw $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$). Daher ist $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Korollar 126 (Sinussatz) Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Winkeln α, β, γ, so gilt

$$\frac{\sin\alpha}{\|c-b\|} = \frac{\sin\beta}{\|c-a\|} = \frac{\sin\gamma}{\|b-a\|} = \frac{1}{2r}, \text{ wobei } r = \frac{\|a-b\| \cdot \|b-c\| \cdot \|c-a\|}{2\,|\det(b-a, c-a)|}$$ den Umkreisradius

(wie in Satz 121) bezeichnet.

Beweis: Verwendet man die im Beweis von Satz 125 (Seite 87) gezeigte Gleichung, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha}{\|c-b\|} = \frac{|\det(b-a, c-a)|}{\|b-a\| \cdot \|c-b\| \cdot \|c-a\|} = \frac{1}{2r} \quad \left(\text{und analog für } \frac{\sin\beta}{\|c-a\|} \text{ und } \frac{\sin\gamma}{\|b-a\|}\right).$$

Satz 127 (Cosinussatz) Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Winkeln α, β, γ, so gelten

$$\|b-a\|^2 = \|c-b\|^2 + \|c-a\|^2 - 2\|c-b\| \cdot \|c-a\| \cdot \cos\gamma,$$
$$\|c-b\|^2 = \|b-a\|^2 + \|c-a\|^2 - 2\|b-a\| \cdot \|c-a\| \cdot \cos\alpha,$$
$$\|c-a\|^2 = \|b-a\|^2 + \|c-b\|^2 - 2\|b-a\| \cdot \|c-b\| \cdot \cos\beta.$$

Beweis: Folgt aus Satz 63, da

$$\|b-a\|^2 = \|(b-c)-(a-c)\|^2 = \|b-c\|^2 + \|a-c\|^2 - 2\langle b-c, a-c\rangle$$
$$= \|c-b\|^2 + \|c-a\|^2 - 2\|c-b\| \cdot \|c-a\| \cdot \cos\varphi_{a-c,b-c} = \|c-b\|^2 + \|c-a\|^2 - 2\|c-b\| \cdot \|c-a\| \cdot \cos\gamma$$

(und analog für die anderen beiden Gleichungen).

Def.: Ist $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so definieren wir seinen Flächeninhalt als $\frac{1}{2}|\det(b-a, c-a)|$.

Bemerkungen: 1) Wegen der Betragsstriche ändert sich dieser Wert nicht, wenn man $b-a$ durch $a-b$ (bzw. $c-a$ durch $a-c$) ersetzt oder die Reihenfolge der beiden Spalten vertauscht. Außerdem ist $|\det(c-a, c-b)| = |\det(c-a, (c-b)-(c-a))| = |\det(c-a, a-b)| = |\det(b-a, c-a)|$ und analog $|\det(b-a, c-b)| = |\det(b-a, c-a)|$.

2) Ergänzt man das Dreieck a, b, c um den Punkt $b+c-a$, so erhält man das Parallelogramm $a, b, b+c-a, c$. (Da $\frac{1}{2}(a + (b+c-a)) = \frac{1}{2}(b+c)$ handelt es sich nach Kor. 105 tatsächlich um ein Parallelogramm.) Dieses besteht aus dem ursprünglichen Dreieck a, b, c und dem hinzugefügten Dreieck $b, b+c-a, c$. Diese beiden Dreiecke werden durch die Isometrie $x \mapsto b+c-x$ bijektiv aufeinander abgebildet (Es handelt sich dabei

um eine Rotation um $180°$ um den Punkt $\frac{1}{2}(b+c)$.) Wir haben am Beginn von Kapitel 4 (Seite 30) gesehen, dass es sinnvoll ist, diesem Parallelogramm den Flächeninhalt $|\det(b-a,c-a)|$ zuzuordnen. Da das ursprüngliche Dreieck genau die Hälfte davon ist, handelt es sich um eine sinnvolle Definition.

<u>Korollar 128</u> Der Flächeninhalt des Dreiecks $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\frac{1}{2}\|c-b\|\cdot h_a = \frac{1}{2}\|c-a\|\cdot h_b = \frac{1}{2}\|b-a\|\cdot h_c$$

wobei h_a, h_b, h_c die Längen der Höhen (wie in Satz 118, Seite 80) bezeichnen.

<u>Beweis</u>: $\frac{1}{2}\|c-b\|\cdot h_a = \frac{1}{2}\|c-b\|\cdot \frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|c-b\|} = \frac{1}{2}|\det(b-a,c-a)|$ und analog für die anderen beiden Ausdrücke.

<u>Korollar 129</u> Der Flächeninhalt des Dreiecks $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ mit Winkeln α,β,γ ist

$$\frac{1}{2}\|b-a\|\cdot\|c-a\|\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\|a-b\|\cdot\|c-b\|\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\|a-c\|\cdot\|b-c\|\cdot\sin\gamma$$

<u>Beweis</u>: Nach dem Beweis von Satz 125 (Seite 87) ist

$$\frac{1}{2}\|b-a\|\cdot\|c-a\|\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\|b-a\|\cdot\|c-a\|\cdot\frac{|\det(b-a,c-a)|}{\|b-a\|\cdot\|c-a\|} = \frac{1}{2}|\det(b-a,c-a)|$$

und analog für die anderen beiden Ausdrücke.

<u>Korollar 130</u> Der Flächeninhalt des Dreiecks $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\frac{1}{2}\sqrt{\|b-a\|^2\cdot\|c-a\|^2 - \langle b-a,c-a\rangle^2}$$

<u>Beweis</u>: Nach Lemma 123 ist $(\det(b-a,c-a))^2 = \|b-a\|^2\cdot\|c-a\|^2 - \langle b-a,c-a\rangle^2$ und daher $|\det(b-a,c-a)| = \sqrt{\|b-a\|^2\cdot\|c-a\|^2 - \langle b-a,c-a\rangle^2}$, woraus sofort die Beh. folgt.

<u>Korollar 131</u> (HERONsche Formel) Es sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Setzt man $S := \frac{1}{2}(\|a-b\| + \|b-c\| + \|c-a\|)$, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks

$$\sqrt{S(S-\|a-b\|)(S-\|b-c\|)(S-\|c-a\|)}.$$

<u>Beweis</u>: Wir setzen $A := \|b-c\|$, $B := \|c-a\|$ und $C := \|a-b\|$. Dann ist

$$16\,S(S-A)(S-B)(S-C) = (A+B+C)(-A+B+C)(A-B+C)(A+B-C)$$

$$= ((B+C)^2 - A^2)(A^2 - (B-C)^2) = (-A^2+B^2+C^2+2BC)(A^2-B^2-C^2+2BC)$$

$$= 4B^2C^2 - (A^2-B^2-C^2)^2 \overset{\text{Satz 127}}{=} 4B^2C^2 - (2BC\cos\alpha)^2 = 4B^2C^2(1-\cos^2\alpha) = 4B^2C^2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow S(S-A)(S-B)(S-C) = \frac{1}{4}B^2C^2\sin^2\alpha \Rightarrow \sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)} = \frac{1}{2}BC\sin\alpha,$$

wobei wieder $\alpha = \varphi_{b-a,c-a}$ bezeichnet. (Beachte, dass $\sin\alpha > 0$ da $0 < \alpha < \pi$.)

Die Beh. folgt aus Kor. 129.

Korollar 132 Es sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Winkeln α, β, γ. Dann sind äquivalent:

(i) $\|a-c\| = \|b-c\|$ (d.h. das Dreieck ist gleichschenkelig),

(ii) $\alpha = \beta$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Mit der Notation des vorangegangenen Beweises ist $A = B$ und daher

$$\cos\alpha \overset{\text{Satz 127}}{=} \frac{B^2+C^2-A^2}{2BC} = \frac{A^2+C^2-B^2}{2AC} \overset{\text{Satz 127}}{=} \cos\beta \quad \text{und daher } \alpha = \beta.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist $\alpha = \beta$, so ist auch $\cos\alpha = \cos\beta$ und daher

$$0 = \cos\alpha - \cos\beta \overset{\text{Satz 127}}{=} \frac{B^2+C^2-A^2}{2BC} - \frac{A^2+C^2-B^2}{2AC} = \frac{A(B^2+C^2-A^2) - B(A^2+C^2-B^2)}{2ABC}$$

$$= \frac{(A-B)C^2 + A(B^2-A^2) - B(A^2-B^2)}{2ABC} = \frac{(A-B)C^2 + (A-B)\big(-A(A+B) - B(A+B)\big)}{2ABC}$$

$$= \frac{(A-B)C^2 - (A-B)(A+B)^2}{2ABC} = \frac{(A-B)\big(C^2 - (A+B)^2\big)}{2ABC}$$

$\boxed{\text{Besser: } \alpha = \beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta \text{ und } \frac{\sin\alpha}{\|c-b\|} = \frac{\sin\beta}{\|c-a\|} \Rightarrow \|c-a\| = \|c-b\|}$

Da a,b,c ein Dreieck ist, ist $C < A+B$ und daher $A-B=0$ und $A=B$.
(Wegen Satz 69(iii) ist $C = \|a-b\| \le \|a-c\| + \|c-b\| = A+B$. Wäre $C = A+B$, so wäre einerseits $C^2 = (A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$ und andererseits $C^2 = A^2+B^2 - 2AB\cos\gamma$, also $1 = -\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = -1 \Rightarrow \gamma = \pi$, Wid.)

Korollar 133 Es sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Winkeln α, β, γ. Dann sind äquivalent:

(i) $\|a-b\| = \|b-c\| = \|c-a\|$ (d.h. das Dreieck ist gleichseitig),

(iii) $\alpha = \beta = \gamma$.

Beweis: Folgt sofort aus Kor. 132 und den analogen Aussagen $B = C \Leftrightarrow \beta = \gamma$ und $A = C \Leftrightarrow \alpha = \gamma$.

10.6.2024

Satz 134 Es sei $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit Winkeln α, β, γ. Weiters sei d der Schnittpunkt der Höhe durch c mit $G(a,b)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\gamma = \frac{\pi}{2}$,

(ii) $\|a-b\|^2 = \|b-c\|^2 + \|c-a\|^2$,

(iii) $\|c-d\|^2 = \|a-d\| \cdot \|b-d\|$ und $\|a-b\| = \|a-d\| + \|d-b\|$,

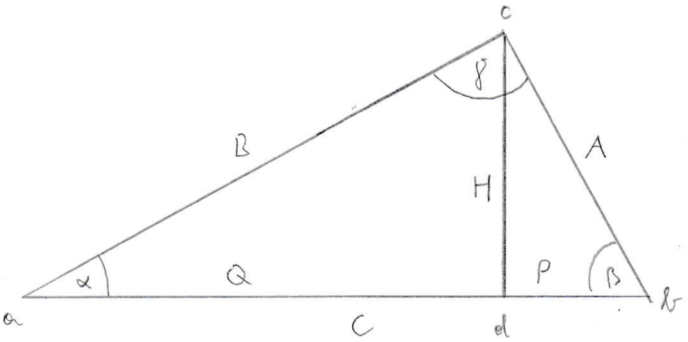
(iv) $\|b-c\|^2 = \|b-a\| \cdot \|b-d\|$ und $\|a-c\|^2 = \|a-b\| \cdot \|a-d\|$,

(v) Der Flächeninhalt des Dreiecks a,b,c ist $\frac{1}{2}\|a-c\| \cdot \|b-c\|$,

(vi) Bezeichnet h den Höhenschnittpunkt des Dreiecks a,b,c, so ist $h = c$,

(vii) Bezeichnet m den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks a,b,c, so ist $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

Beweis: Wir verwenden (wieder) die Bezeichnungen $A = \|b-c\|$, $B = \|a-c\|$ und $C = \|a-b\|$ sowie $H := \|c-d\|$, $Q = \|a-d\|$ und $P = \|b-d\|$.



Beweis: Da $a, b, d \in G(a,b)$ kollinear sind, gilt $P+Q=C$ oder $P+C=Q$ oder $Q+C=P$.

Anwendung von Kor. 64 auf das Dreieck b,d,c gibt $A^2 = \|b-c\|^2 = \|c-d\|^2 + \|b-d\|^2 = H^2+P^2$

Anwendung von Kor. 64 auf das Dreieck a,d,c gibt $B^2 = \|a-c\|^2 = \|c-d\|^2 + \|a-d\|^2 = H^2+Q^2$

(da $\langle b-d, c-d\rangle = \langle a-d, c-d\rangle = 0$).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Nach Satz 127 ist $C^2 = A^2+B^2-2AC\cos\gamma$. Ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos\gamma = 0$ und $C^2 = A^2+B^2$. Ist $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, so ist $\cos\gamma \neq 0$ und $C^2 \neq A^2+B^2$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $2H^2+P^2+Q^2 = A^2+B^2 = C^2 = (P\pm Q)^2 = P^2+Q^2 \pm 2PQ \Rightarrow H^2 = \pm PQ$

Da $H^2 = -PQ$ unmöglich ist, gilt $H^2 = PQ$ und $C = P+Q$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $A^2 = H^2+P^2 = PQ+P^2 = P(P+Q) = CP$ und

$B^2 = H^2+Q^2 = PQ+Q^2 = Q(P+Q) = CQ$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) $A^2+B^2 = C(P+Q)$. Wäre $C = P-Q$, so $H^2+P^2 = A^2 = CP = P^2-PQ$ und daher $H^2 = -PQ$, Wid. Wäre $C = Q-P$, so $H^2+Q^2 = B^2 = CQ = Q^2-PQ$ und wieder $H^2 = -PQ$, Wid. Also ist $C = P+Q$ und $A^2+B^2 = C^2$

(i) $\Leftrightarrow$ (v) Nach Kor. 129 ist der Flächeninhalt $\frac{1}{2}AB\sin\gamma$. Ist $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so ist $\sin\gamma = 1$ und der Flächeninhalt ist $\frac{1}{2}AB$. Ist $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, so ist $\sin\gamma < 1$ und der Flächeninhalt ist $< \frac{1}{2}AB$.

(i) $\Rightarrow$ (vi) $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow \langle a-c, b-c\rangle = 0$. Daher ist $\langle c, c-b\rangle = \langle a, c-b\rangle$ (d.h. $c \in H_a$) und $\langle c, c-a\rangle = \langle b, c-a\rangle$ [d.h. $c \in H_b$], also $c \in H_a \cap H_b = \{h\}$, d.h. $h = c$.

(vi) $\Rightarrow$ (i) $h = c \Rightarrow c \in H_a \Rightarrow \langle c, c-b\rangle = \langle a, c-b\rangle \Rightarrow \langle a-c, b-c\rangle = 0 \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

(i) $\Rightarrow$ (vii) $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow \langle a-c, b-c\rangle = 0$. Daraus folgt

$\langle \frac{1}{2}(a+b), c-b\rangle - \langle \frac{1}{2}(b+c), c-b\rangle = \frac{1}{2}\langle a-c, c-b\rangle = 0$, d.h. $\frac{1}{2}(a+b) \in M_{b,c}$.

Da trivialerweise $\frac{1}{2}(a+b) \in M_{a,b}$, ist $\frac{1}{2}(a+b) \in M_{a,b} \cap M_{b,c} = \{m\}$, also $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

(vii) $\Rightarrow$ (i) $m = \frac{1}{2}(a+b) \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) \in M_{b,c} \Rightarrow \langle \frac{1}{2}(a+b), c-b\rangle = \langle \frac{1}{2}(b+c), c-b\rangle$

$\Rightarrow 0 = \langle \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b+c), c-b\rangle = \frac{1}{2}\langle a-c, c-b\rangle \Rightarrow \langle a-c, b-c\rangle = 0 \Rightarrow \cos\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2}$

Bemerkung: Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ($\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A^2+B^2 = C^2$) wird als Satz des Pythagoras bezeichnet, die erste Gleichung aus (iii) ($H^2 = PQ$) als Höhensatz und (iv) ($A^2 = PC$, $B^2 = QC$) als Kathetensatz.

Lemma 135 Sind $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, so ist $\varphi_{cv,cw} = \varphi_{v,w}$

Beweis: $\cos\varphi_{cv,cw} = \frac{\langle cv, cw\rangle}{\|cv\|\cdot\|cw\|} = \frac{c^2\langle v,w\rangle}{|c|^2\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \cos\varphi_{v,w} \Rightarrow \varphi_{cv,cw} = \varphi_{v,w}$

Lemma 136 Sind $v, w \in \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ mit $\|v\| = \|w\|$ und $v + w \neq 0$, so ist

$\varphi_{v,v+w} = \varphi_{v+w,w} = \frac{1}{2}\varphi_{v,w}$.

Beweis: Es sei zunächst $\|v\| = \|w\| = 1$. Dann ist

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle = 2 + 2\langle v,w\rangle = 2(1+\langle v,w\rangle)$$

und daher $\|v+w\| = \sqrt{2(1+\langle v,w\rangle)}$. (Wegen Kor. 61 ist $-1 \leq \langle v,w\rangle \leq 1$ und $-1 = \langle v,w\rangle$ nur für $w = -v$, also $\langle v,w\rangle > -1$ und $1 + \langle v,w\rangle > 0$.)

$$\Rightarrow \cos\varphi_{v,v+w} = \frac{\langle v, v+w\rangle}{\|v\|\cdot\|v+w\|} = \frac{\langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle}{\|v+w\|} = \frac{1+\langle v,w\rangle}{\sqrt{2(1+\langle v,w\rangle)}} = \sqrt{\frac{1+\langle v,w\rangle}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\varphi_{v,w}}{2}} \overset{\text{Übungsbsp. 64b}}{=} \cos\frac{\varphi_{v,w}}{2}$$

und daher $\varphi_{v,v+w} = \frac{1}{2}\varphi_{v,w}$. Sei nun $c := \|v\| = \|w\| > 0$ bel., $v_0 = \frac{1}{c}v$ und $w_0 = \frac{1}{c}w$.

Dann $\|v_0\| = \|w_0\| = 1$ (nach Lemma 67), $v = cv_0$ und $w = cw_0$. Daher

$$\varphi_{v,v+w} = \varphi_{cv_0, c(v_0+w_0)} \overset{\text{Lemma 135}}{=} \varphi_{v_0,v_0+w_0} = \frac{1}{2}\varphi_{v_0,w_0} = \frac{1}{2}\varphi_{cv_0,cw_0} = \frac{1}{2}\varphi_{v,w}.$$

Schließlich ist $\varphi_{v+w,w} = \varphi_{w,w+v} = \frac{1}{2}\varphi_{w,v} = \frac{1}{2}\varphi_{v,w}$.

Def.: Sind $a \in \mathbb{R}^2$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$ l.u. mit $\|v\| = \|w\|$, so seien $G_{a,v+w}$ und $G_{a,v-w}$ die Winkelhalbierenden der beiden Geraden $G_{a,v}$ und $G_{a,w}$.

11.6.2024

Lemma 137 Ist $a \in \mathbb{R}^2$, $v, w \in \mathbb{R}^2$ l.u. mit $\|v\| = \|w\|$, so ist

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, G_{a,v}) = d(x, G_{a,w})\} = G_{a,v+w} \cup G_{a,v-w}.$$

Beweis: $d(x, G_{a,v}) = d(x, G_{a,w}) \overset{\text{Satz 110}}{\Longleftrightarrow} \frac{|\langle x-a, v^\perp\rangle|}{\|v\|} = \frac{|\langle x-a, w^\perp\rangle|}{\|w\|}$

$\Leftrightarrow |\langle x-a, v^\perp\rangle| = |\langle x-a, w^\perp\rangle| \Leftrightarrow \langle x-a, v^\perp\rangle = \pm\langle x-a, w^\perp\rangle$

$\Leftrightarrow \langle x-a, v^\perp \pm w^\perp\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x-a, (v\pm w)^\perp\rangle = 0$

$\overset{\text{Lemma 114 (iii)}}{\Longleftrightarrow} \det(x-a, v\pm w) = 0 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : x - a = \alpha(v \pm w)$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : x = a + \alpha(v\pm w) \Leftrightarrow x \in G_{a,v+w} \cup G_{a,v-w}$

Bemerkung: Sind $v, w \in \mathbb{R}^2$ l.u., aber nicht notwendig $\|v\| = \|w\|$, so kann man verwenden, dass $G_{a,v} = G_{a,\|w\|v}$ und $G_{a,w} = G_{a,\|v\|w}$, wobei $\|\,\|w\|v\,\| = \|\,\|v\|w\,\| = \|v\|\cdot\|w\|$. Die Winkelhalbierenden von $G_{a,v}$ und $G_{a,w}$ sind daher die Winkelhalbierenden von $G_{a,\|w\|v}$ und $G_{a,\|v\|w}$, d.h. $G_{a,\|w\|v \pm \|v\|w}$

Dabei ist $\|w\|v \pm \|v\|w \neq 0$, da v,w l.u. sind und daher aus $\|w\|v \pm \|v\|w = 0$ folgen würde, dass $\|v\| = \|w\| = 0$, Wid.

Definition: Die drei inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ sind definiert als

$$W_a := G_{a,\, \|c-a\|(b-a)+\|b-a\|(c-a)} = G_{a,\, B(b-a)+C(c-a)},$$

$$W_b := G_{b,\, \|c-b\|(a-b)+\|a-b\|(c-b)} = G_{b,\, A(a-b)+C(c-b)},$$

$$W_c := G_{c,\, \|a-c\|(b-c)+\|b-c\|(a-c)} = G_{c,\, B(b-c)+A(a-c)}.$$

Bemerkung: Die drei inneren Winkelhalbierenden eines Dreiecks sind nicht parallel. Wäre z.B. $W_a \parallel W_b$, so würde es ein $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ geben, sodass

$$A(a-b)+C(c-b) = \alpha\big(B(b-a)+C(c-a)\big) = \alpha B(b-a)+\alpha C(c-a)$$

und daher $(A+\alpha B+\alpha C)a - (A+\alpha B+C)b + (1-\alpha)Cc = 0$. Da $A+\alpha B+\alpha C - A - \alpha B - C + C - \alpha C = 0$ wären a,b,c kollinear nach Kor. 95, Wid.

Satz 138 (Inkreismittelpunkt eines Dreiecks) Ist $a,b,c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck, so gilt $W_a \cap W_b \cap W_c = \{i\}$ (d.h. die drei inneren Winkelhalbierenden schneiden einander in einem Punkt), wobei (wieder mit $S = \frac{1}{2}(\|a-b\|+\|b-c\|+\|c-a\|)$)

$$i = \frac{1}{2S}\big(\|b-c\|\cdot a + \|c-a\|\cdot b + \|a-b\|\cdot c\big) = \frac{1}{2S}(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c)$$

und

$$d(i,G(a,b)) = d(i,G(b,c)) = d(i,G(c,a)) = \frac{|\det(b-a,c-a)|}{2S} \quad \text{(Inkreisradius)}.$$

Bemerkung: Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks a,b,c mit F, so ist sein Inkreisradius also $\frac{F}{S}$.

Beweis: Es ist

$$i = \frac{1}{2S}(A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c) = \frac{1}{2S}\big((2S-B-C)a + B\cdot b + C\cdot c\big)$$

$$= a + \frac{1}{2S}\big(B\cdot(b-a) + C\cdot(c-a)\big) \in W_a$$

und völlig analog $i \in W_b$ und $i \in W_c$, also $W_a \cap W_b \cap W_c = \{i\}$. Wegen Satz 110 ist

$$d(i,G(a,b)) = d(i,G_{a,b-a}) = \frac{|\langle i-a,(b-a)^{\perp}\rangle|}{\|b-a\|} \overset{\text{Lemma 114 (iii)}}{=} \frac{|\det(i-a,b-a)|}{\|b-a\|}$$

$$= \frac{1}{\|b-a\|}\left|\det\left(\frac{1}{2S}\big(B\cdot(b-a)+C\cdot(c-a)\big), b-a\right)\right| = \frac{1}{2SC}\Big|B\underbrace{\det(b-a,b-a)}_{=0} + C\det(c-a,b-a)\Big|$$

$$= \frac{C}{2SC}|\det(b-a,c-a)| = \frac{|\det(b-a,c-a)|}{2S}$$

und völlig analog $d(i,G(b,c)) = d(i,G(c,a)) = \dfrac{|\det(b-a,c-a)|}{2S}$.

<u>Definition</u>: Die drei äußeren Winkelhalbierenden des Dreiecks $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ sind definiert als

$$W_a^* := G_{a,\|c-a\|(b-a)-\|b-a\|(c-a)} = G_{a,B(b-a)-C(c-a)},$$

$$W_b^* := G_{b,\|c-b\|(a-b)-\|a-b\|(c-b)} = G_{b,A(a-b)-C(c-b)},$$

$$W_c^* := G_{c,\|a-c\|(b-c)-\|b-c\|(a-c)} = G_{c,B(b-c)-A(a-c)}.$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Die drei äußeren Winkelhalbierenden eines Dreiecks sind nicht parallel. Wäre z. B. $W_a^* \| W_b^*$, so würde es ein $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ geben, sodass

$$A(a-b) - C(c-b) = \alpha\big(B(b-a) - C(c-a)\big) = \alpha B(b-a) - \alpha C(c-a)$$

und daher $(A + \alpha B - \alpha C)a - (A + \alpha B - C)b + (\alpha - 1)Cc = 0$. Da $A + \alpha B - \alpha C - A - \alpha B + C + \alpha C - C = 0$ wären a, b, c kollinear nach Kor. 95, Wid.

2) Ebenso ist W_a nicht zu W_b^* bzw W_c^* parallel. Wäre z. B. $W_a \| W_b^*$, so würde es ein $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ geben, sodass

$$A(a-b) - C(c-b) = \alpha\big(B(b-a) + C(c-a)\big) = \alpha B(b-a) + \alpha C(c-a)$$

und daher $(A + \alpha B + \alpha C)a - (A + \alpha B - C)b - (1+\alpha)Cc = 0$. Da $A + \alpha B + \alpha C - A - \alpha B + C - C - \alpha C = 0$ wären a, b, c kollinear nach Kor. 95, Wid.

Völlig analog ist W_b nicht zu W_a^* bzw. W_c^* parallel und W_c nicht zu W_a^* bzw. W_b^* parallel.

<u>Satz 139</u> (Ankreismittelpunkte eines Dreiecks) Es sei $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Dann gelten:

(i) $W_a \cap W_b^* \cap W_c^* = \{a^*\}$, wobei $a^* = \dfrac{1}{-A+B+C}(-Aa + Bb + Cc)$

und $d(a^*, G(a,b)) = d(a^*, G(b,c)) = d(a^*, G(c,a)) = \dfrac{|\det(b-a, c-a)|}{-A+B+C} = \dfrac{F}{S-A}$,

(ii) $W_a^* \cap W_b \cap W_c^* = \{b^*\}$, wobei $b^* = \dfrac{1}{A-B+C}(Aa - Bb + Cc)$

und $d(b^*, G(a,b)) = d(b^*, G(b,c)) = d(b^*, G(c,a)) = \dfrac{|\det(b-a, c-a)|}{A-B+C} = \dfrac{F}{S-B}$,

(iii) $W_a^* \cap W_b^* \cap W_c = \{c^*\}$, wobei $c^* = \dfrac{1}{A+B-C}(Aa + Bb - Cc)$

und $d(c^*, G(a,b)) = d(c^*, G(b,c)) = d(c^*, G(c,a)) = \dfrac{|\det(b-a, c-a)|}{A+B-C} = \dfrac{F}{S-C}$.

<u>Beweis</u>: (i) Es ist

$$a^* = \frac{1}{-A+B+C}(-Aa + Bb + Cc) = \frac{1}{-A+B+C}\big((-A+B+C)a + B(b-a) + C(c-a)\big)$$

$$= a + \frac{1}{-A+B+C}\big(B(b-a) + C(c-a)\big) \in W_a$$

und

$$a^* = \frac{1}{-A+B+C}(-Aa+Bb+Cc) = \frac{1}{-A+B+C}\big(-A(a-b)+(-A+B+C)b+C(c-b)\big)$$

$$= b - \frac{1}{-A+B+C}\big(A(a-b)-C(c-b)\big) \in W_b^*$$

17.6.2024

und analog $a^* \in W_c^*$, also $W_a \cap W_b^* \cap W_c^* = \{a^*\}$. Wegen Satz 110 ist

$$d(a^*, G(b,c)) = d(a^*, G_{b,c-b}) = \frac{|\langle a^*-b, (c-b)^\perp\rangle|}{\|c-b\|} = \frac{|\det(a^*-b, c-b)|}{\|c-b\|}$$

$$= \frac{1}{\|c-b\|}\left|\det\left(\frac{1}{-A+B+C}\big(C(c-b)-A(a-b)\big), c-b\right)\right|$$

$$= \frac{1}{(-A+B+C)A}\left|C\underbrace{\det(c-b,c-b)}_{=0} - A\det(a-b,c-b)\right|$$

$$= \frac{A}{(-A+B+C)A}|\det(a-b,c-b)| = \frac{1}{-A+B+C}|\det(b-a,c-a)|$$

und

$$d(a^*, G(a,b)) = d(a^*, G_{a,b-a}) = \frac{|\langle a^*-a, (b-a)^\perp\rangle|}{\|b-a\|} = \frac{|\det(a^*-a, b-a)|}{\|b-a\|}$$

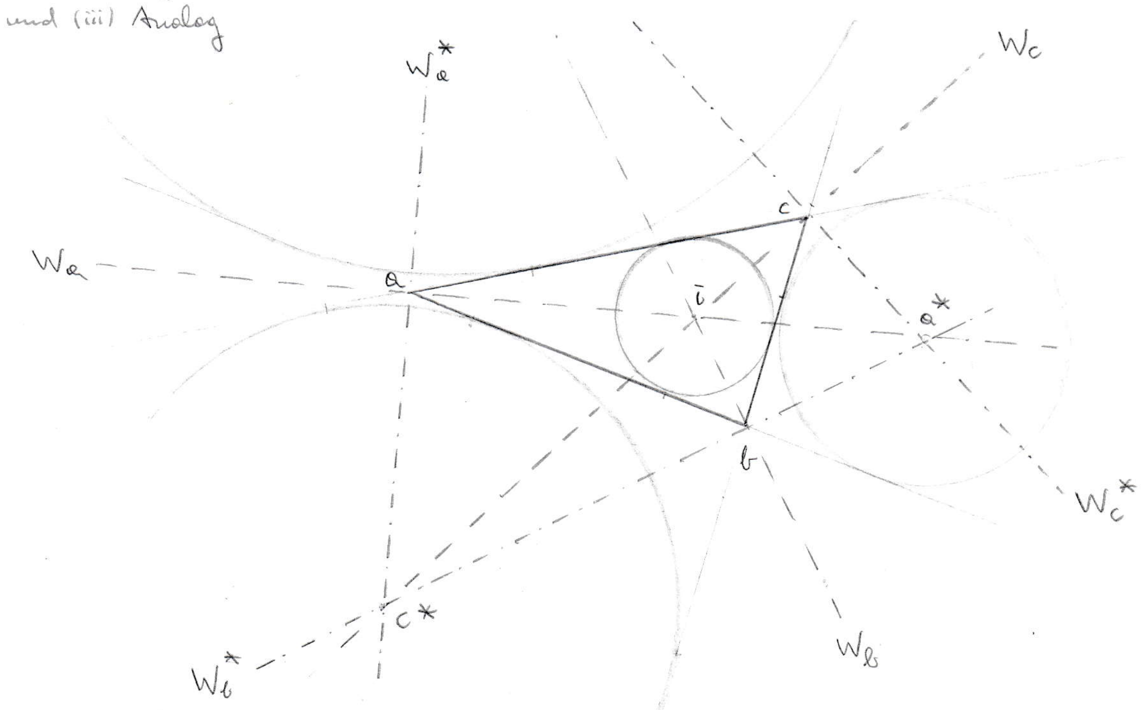
$$= \frac{1}{\|b-a\|}\left|\det\left(\frac{1}{-A+B+C}\big(B(b-a)+C(c-a)\big), b-a\right)\right|$$

$$= \frac{1}{(-A+B+C)C}\left|B\underbrace{\det(b-a,b-a)}_{=0} + C\det(c-a,b-a)\right|$$

$$= \frac{C}{(-A+B+C)C}|\det(c-a,b-a)| = \frac{1}{-A+B+C}|\det(b-a,c-a)|$$

und analog $d(a^*, G(c,a)) = \dfrac{1}{-A+B+C}|\det(b-a,c-a)|$

(ii) und (iii) Analog



Korollar 140 Bezeichnet F die Fläche eines Dreiecks, sowie $r = \frac{F}{S}$ seinen Inkreisradius und $r_a = \frac{F}{S-A}$, $r_b = \frac{F}{S-B}$ und $r_c = \frac{F}{S-C}$ die Radien seiner Ankreise, so gelten:

(i) $r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = F^2$;

(ii) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$.

Beweis: (i) $r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{F^4}{S(S-A)(S-B)(S-C)} \overset{\text{Kor. 131}}{=} \frac{F^4}{F^2} = F^2$

(ii) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{S-A+S-B+S-C}{F} = \frac{3S-(A+B+C)}{F} = \frac{3S-2S}{F} = \frac{S}{F} = \frac{1}{r}$

Lemma 141 Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ zwei Dreiecke. Dann gibt es eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften: $f(x) = Ax + v \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ für ein $A \in GL_2(\mathbb{R})$ und ein $v \in \mathbb{R}^2$ und $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ und $f(c) = c'$.

Beweis: Es sei $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix mit den Spalten $b-a$ und $c-a$ und $M' \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix mit den Spalten $b'-a'$ und $c'-a'$. Da $b-a, c-a$ l.u. sind und $b'-a', c'-a'$ l.u. sind, gilt $M, M' \in GL_2(\mathbb{R})$ (nach Satz 27 und Satz 38). Es sei $A := M' \cdot M^{-1}$. Wegen Satz 26 ist $A \in GL_2(\mathbb{R})$. Vergleicht man in $A \cdot M = M'$ die Spalten der Matrizen auf beiden Seiten, so erhält man $A \cdot (b-a) = b'-a'$ und $A \cdot (c-a) = c'-a'$. Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A \cdot (x-a) + a' = A \cdot x + a' - Aa$ (d.h. $v := a' - Aa$). Dann ist

$$f(a) = A \cdot (a-a) + a' = A \cdot 0 + a' = 0 + a' = a'$$
$$f(b) = A \cdot (b-a) + a' = b' - a' + a' = b' \quad \text{und}$$
$$f(c) = A \cdot (c-a) + a' = c' - a' + a' = c'.$$

Lemma 142 Es sei $\{v, w\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften $\|\varphi(v)\| = \|v\|$, $\|\varphi(w)\| = \|w\|$ und $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|v - w\|$. Dann ist φ orthogonal.

Beweis: Es ist

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle \overset{\text{Satz 63}}{=} \frac{1}{2}\left(\|\varphi(v)\|^2 + \|\varphi(w)\|^2 - \|\varphi(v) - \varphi(w)\|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v-w\|^2\right) \overset{\text{Satz 63}}{=} \langle v, w \rangle.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodass $x = \alpha v + \beta w$. Es folgt

$$\|\varphi(x)\|^2 = \langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = \langle \varphi(\alpha v + \beta w), \varphi(\alpha v + \beta w) \rangle = \langle \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w), \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w) \rangle$$
$$= \alpha^2 \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle + 2\alpha\beta \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle + \beta^2 \langle \varphi(w), \varphi(w) \rangle$$
$$= \alpha^2 \|\varphi(v)\|^2 + 2\alpha\beta \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle + \beta^2 \|\varphi(w)\|^2 = \alpha^2 \|v\|^2 + 2\alpha\beta \langle v, w \rangle + \beta^2 \|w\|^2$$
$$= \alpha^2 \langle v, v \rangle + 2\alpha\beta \langle v, w \rangle + \beta^2 \langle w, w \rangle = \langle \alpha v + \beta w, \alpha v + \beta w \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

D.h. $\|\varphi(x)\| = \|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ und φ ist orthogonal nach Satz 78.

Definition: Zwei Dreiecke $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ heißen kongruent, wenn es eine Isometrie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ und $f(c) = c'$ gibt.

Satz 143 Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ zwei Dreiecke. Dann sind äquivalent:

(i) Die beiden Dreiecke a, b, c und a', b', c' sind kongruent,

(ii) $\|a-b\| = \|a'-b'\|$, $\|b-c\| = \|b'-c'\|$ und $\|c-a\| = \|c'-a'\|$. (d.h. $A = A'$, $B = B'$ und $C = C'$).

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie mit der Eigenschaft $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ und $f(c) = c'$, so ist $\|a'-b'\| = \|f(a) - f(b)\| = \|a - b\|$ und völlig analog $\|b'-c'\| = \|b-c\|$ und $\|c'-a'\| = \|c-a\|$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nach Lemma 141 gibt es eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + v$ mit $A \in GL_2(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^2$, $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ und $f(c) = c'$. Dann ist

$$\|A(b-a)\| = \|Ab - Aa\| = \|(Ab+v) - (Aa+v)\| = \|f(b) - f(a)\| = \|b'-a'\| = \|b-a\|,$$

$$\|A(c-a)\| = \|Ac - Aa\| = \|(Ac+v) - (Aa+v)\| = \|f(c) - f(a)\| = \|c'-a'\| = \|c-a\|$$

und

$$\|A(c-a) - A(b-a)\| = \|Ac - Aa - Ab + Aa\| = \|Ac - Ab\| = \|(Ac+v) - (Ab+v)\|$$

$$= \|f(c) - f(b)\| = \|c'-b'\| = \|c-b\| = \|(c-a) - (b-a)\|.$$

Da a, b, c ein Dreieck ist, sind $b-a$, $c-a$ l.u. und daher (nach Satz 16(ii)) eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Nach Lemma 142 ist die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$ orthogonal. Nach Satz 81 ist $A \in O(2)$ und nach Satz 89 ist $f \in \mathcal{I}_2$.

Korollar 144 (Kongruenzsätze für Dreiecke) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die folgenden Größen der beiden Dreiecke übereinstimmen:

(i) Die Längen aller drei Seiten (SSS-Satz),

(ii) Die Länge einer Seite und die beiden daran anliegenden Winkel (WSW-Satz) oder die Länge einer Seite, ein daran anliegender Winkel und der der Seite gegenüber liegende Winkel (SWW-Satz),

(iii) Die Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel (SWS-Satz),

(iv) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüber liegende Winkel (SSW-Satz).

Beweis: (i) Wurde in Satz 143 bewiesen.

(ii) OBdA sei $A = A'$. Wegen Satz 125 ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$. Wegen Kor. 126 ist $\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B}$ und $\frac{\sin\alpha'}{A'} = \frac{\sin\beta'}{B'}$ und daher

$$B' = A' \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'} = A \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = B \quad \text{und ebenso} \quad C' = A' \frac{\sin\gamma'}{\sin\alpha'} = A \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = C$$

Die Beh. folgt aus Satz 143.

(iii) OBdA sei $A=A'$, $B=B'$ und $\gamma=\gamma'$. Dann ist

$$C' \overset{\text{Satz 127}}{=} \sqrt{A'^2+B'^2-2A'\cdot B'\cdot\cos\gamma'} = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\gamma} \overset{\text{Satz 127}}{=} C$$

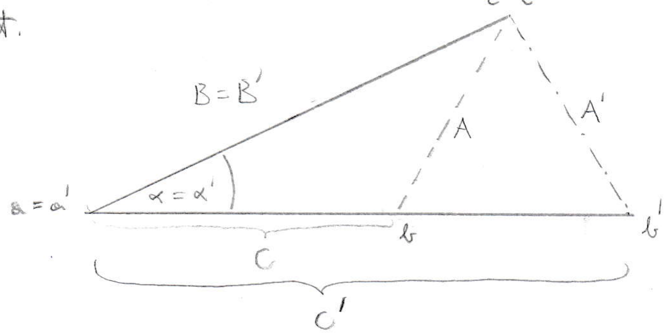
und die Beh. folgt wieder aus Satz 143.

(iv) OBdA sei $A=A'$, $B=B'$, $\alpha=\alpha'$ und $A\geq B$. Nach Satz 127 ist $A^2=B^2+C^2-2BC\cos\alpha$. Fasst man dies als quadratische Gleichung $C^2-2B\cos\alpha\cdot C+B^2-A^2=0$ auf, so erhält man $C=B\cos\alpha\pm\sqrt{B^2\cos^2\alpha+A^2-B^2}$.

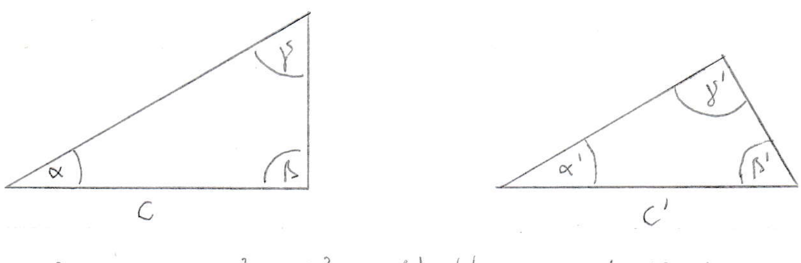
Aus $A\geq B$ folgt $\sqrt{B^2\cos^2\alpha+A^2-B^2}\geq\sqrt{B^2\cos^2\alpha}=B|\cos\alpha|$ und daher $B\cos\alpha-\sqrt{B^2\cos^2+A^2-B^2}\leq B\cos\alpha-B|\cos\alpha|=B(\cos\alpha-|\cos\alpha|)\leq 0$. Da $C>0$ folgt $C=B\cos\alpha+\sqrt{A^2-B^2(1-\cos^2\alpha)}=B\cos\alpha+\sqrt{A^2-B^2\sin^2\alpha}$ und somit

$C'=B'\cos\alpha'+\sqrt{A'^2-B'^2\sin^2\alpha'}=B\cos\alpha+\sqrt{A^2-B^2\sin^2\alpha}=C$. Die Beh. folgt aus Satz 143.

Bemerkungen: 1) Ohne die Voraussetzung $A\geq B$ ist Kor. 144 (iv) nicht korrekt. Im Bsp. unten ist $A=A'$, $B=B'$ und $\alpha=\alpha'$, aber die Dreiecke a,b,c und a',b',c' sind nicht kongruent.



2) Zwei Dreiecke brauchen nicht kongruent zu sein, wenn eine Seitenlänge und zwei Winkel übereinstimmen. Im folgenden Bsp. ist $C=C'$, $\alpha=\alpha'$ und $\beta=\gamma'$, aber die Dreiecke sind nicht kongruent.



Definition: Eine Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ heißt Ähnlichkeitsabbildung, wenn sie die Gestalt $f(x)=\rho Rx+v$ mit $\rho>0$, $R\in O(2)$ und $v\in\mathbb{R}^2$ hat.

Bemerkung: Ähnlichkeitsabbildungen sind Verknüpfungen einer Streckung (d.h. einer Abbildung $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto\rho x$ für ein $\rho>0$) und einer Isometrie. Wegen $\rho Rx+v=R(\rho x)+v=\rho(Rx+\frac{1}{\rho}v)$ kann man die Reihenfolge dabei wählen. 18.6.2024

Definition: Zwei Dreiecke $a,b,c\in\mathbb{R}^2$ und $a',b',c'\in\mathbb{R}^2$ heißen ähnlich, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $f(a)=a'$, $f(b)=b'$ und $f(c)=c'$ gibt.

Satz 145 Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ und $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ zwei Dreiecke. Dann sind äquivalent:

(i) a, b, c und a', b', c' sind ähnlich,

(ii) $\frac{\|b'-a'\|}{\|b-a\|} = \frac{\|c'-b'\|}{\|c-b\|} = \frac{\|a'-c'\|}{\|a-c\|}$, d.h. $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es gibt eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Gestalt $f(x) = \rho R(x) + v$ mit $\rho > 0$, $R \in O(2)$, $v \in \mathbb{R}^2$ und $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ und $f(c) = c'$. Es folgt

$$\|b'-a'\| = \|f(b) - f(a)\| = \|\rho Rb + v - (\rho Ra + v)\| = \|\rho(Rb - Ra)\| = \rho\|Rb - Ra\|$$

$$= \rho\|R(b-a)\| = \rho\|b-a\|$$

und daher $\frac{\|b'-a'\|}{\|b-a\|} = \rho$ und analog $\frac{\|c'-b'\|}{\|c-b\|} = \frac{\|a'-c'\|}{\|a-c\|} = \rho$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\rho := \frac{\|b'-a'\|}{\|b-a\|} = \frac{\|c'-b'\|}{\|c-b\|} = \frac{\|a'-c'\|}{\|a-c\|}$. Dann ist $\frac{1}{\rho}a, \frac{1}{\rho}b, \frac{1}{\rho}c$

ein Dreieck. (Wäre $\frac{1}{\rho}a, \frac{1}{\rho}b, \frac{1}{\rho}c$ kollinear $\Rightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, nicht alle $= 0$, sodass $\frac{\alpha}{\rho}a + \frac{\beta}{\rho}b + \frac{\gamma}{\rho}c = 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Dann $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \Rightarrow a, b, c$ kollinear, Wid.)

Da $\frac{\|\frac{1}{\rho}b' - \frac{1}{\rho}a'\|}{\|b-a\|} = \frac{\|\frac{1}{\rho}c' - \frac{1}{\rho}b'\|}{\|c-b\|} = \frac{\|\frac{1}{\rho}a' - \frac{1}{\rho}c'\|}{\|a-c\|} = 1$, sind die Dreiecke a, b, c und $\frac{1}{\rho}a', \frac{1}{\rho}b', \frac{1}{\rho}c'$ kongruent. Nach Satz 143 gibt es eine Isometrie $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ der Gestalt $g(x) = Rx + v$ mit $R \in O(2)$, $v \in \mathbb{R}^2$ und $g(a) = \frac{1}{\rho}a'$, $g(b) = \frac{1}{\rho}b'$, $g(c) = \frac{1}{\rho}c'$. Es sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \rho g(x) = \rho Rx + \rho v$. Dann ist f eine Ähnlichkeitsabbildung und $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$.

Korollar 146 Zwei Dreiecke sind ähnlich wenn die folgenden Größen übereinstimmen:

(i) Die Verhältnisse der Längen aller drei Seiten,

(ii) Die Verhältnisse der Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel,

(iii) Die Verhältnisse der Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüber liegende Winkel,

(iv) Zwei Winkel.

Beweis: (i) Wurde in Satz 145 bewiesen.

(ii) OBdA sei $\rho := \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}$ und $\gamma' = \gamma$. Dann ist

$$\frac{C'}{C} = \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\gamma'}}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}} = \frac{\sqrt{\rho^2 A^2 + \rho^2 B^2 - 2\rho^2 AB\cos\gamma}}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}} = \rho$$

Die Beh. folgt aus Satz 145.

(iii) OBdA sei $\varrho := \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}$, $\alpha' = \alpha$ und $A \geq B$ ($\Rightarrow A' = \frac{A}{B} B' \geq 1$). Wie im Beweis

von Kor. 144 (iv) ist

$$\frac{C'}{C} = \frac{B'\cos\alpha' + \sqrt{A'^2 - B'^2\sin^2\alpha'}}{B\cos\alpha + \sqrt{A^2 - B^2\sin^2\alpha}} = \frac{\varrho B\cos\alpha + \sqrt{\varrho^2 A^2 - \varrho^2 B^2 \sin^2\alpha}}{B\cos\alpha + \sqrt{A^2 - B^2\sin^2\alpha}} = \varrho$$

und die Beh. folgt aus Satz 145.

(iv) Laut Voraussetzung ist $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Aus $\frac{\sin\alpha'}{A'} = \frac{\sin\beta'}{B'}$ und

$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B}$ folgt $\frac{B'}{A'} = \frac{\sin\beta'}{\sin\alpha'} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{B}{A}$ und daher $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}$. Analog zeigt

man $\frac{A'}{A} = \frac{C'}{C}$ und die Beh. folgt aus Satz 145