

ÜBUNGEN

1. [Wiederholungsaufgabe] Der Satz von der Umkehrabbildung¹ behauptet dass die Abbildung f lokal invertierbar ist, falls die Linearisierung $Df(x_0)$ invertierbar ist. Zeigen Sie anhand des Beispiels $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ dass es keine globale Inverse $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ geben muss.

2. [Wiederholungsaufgabe] Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(0) = 0$ und $f(x) = \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass obwohl f auf \mathbb{R} differenzierbar ist, mit $f'(0) > 0$, es keine Umgebung U_0 von 0 gibt, auf der f injektiv ist. Somit kann man im Satz von der Umkehrabbildung die Voraussetzung $f \in C^1$ nicht auf ledigliche Differenzierbarkeit schwächen.

3. [Wiederholungsaufgabe] Zeigen Sie, dass es kein $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt, an dem der Satz der Umkehrabbildung für die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $f(x_1, x_2) = (\cos(x_1 + x_2), \sin(x_1 + x_2))$, anwendbar ist. Zusätzlich, das Versagen der lokalen Invertierbarkeit ist total: es gibt keine Umgebungen U_0 von (x_1, x_2) und V_0 von $f(x_1, x_2)$, mit $f : U_0 \rightarrow V_0$ injektiv oder surjektiv.

4. [Wiederholungsaufgabe] Zeigen Sie, dass falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein bijektives Polynom mit Umkehrfunktion Polynom ist, dann gilt $f(x) = ax + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

5. [Wiederholungsaufgabe] (i) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ab \neq 0$, die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (v/b, u - 1 + av^2/b^2)$ die Inverse von $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y + 1 - ax^2, bx)$, ist. D.h., auf \mathbb{R}^2 gibt es bijektive Abbildungen mit polynomiale Koordinaten deren Inverse eine Abbildung mit polynomiale Koordinaten ist.

(ii) Zeigen Sie, dass man die Funktion f von (i) nicht als Polynom $f(z) = \sum_{0 \leq k \leq n} \alpha_k z^k$ mit komplexe Koeffizienten α_k , in der komplexen Variable $z = x + iy \in \mathbb{C}$, auffassen kann. Zusätzlich zeigen Sie, dass ein bijektives Polynom $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Form $f(z) = \alpha_1 z + \alpha_0$ für gewisse $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ mit $\alpha_1 \neq 0$ haben muss.

6. [Wiederholungsaufgabe] Die in den Übungen 4-5 auftretende Situation ist eher eine Ausnahme: allgemein ist es zu erwarten, dass eine höhere Dimension Komplikationen einbringt, die oft unüberwindbar sind. Zeigen Sie, dass man ein positives Polynom $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$ als Summe von Quadrate von reelle Polynomen schreiben kann². Hingegen, obwohl $\mathfrak{P}(x, y) = x^4 y^2 + x^2 y^4 - 3x^2 y^2 + 1 \geq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, gibt es keine reelle Polynome $Q_k(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq n_k} a_{ijk} x^i y^j$ mit $a_{ijk} \in \mathbb{R}$, so dass $\mathfrak{P}(x, y) = \sum_{k=1}^N [Q_k(x, y)]^2$.

7. [Wiederholungsaufgabe] Falls $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung ist, gibt es Programme die die lineare Inverse $\varphi = F^{-1}$ ausrechnen können. Für nichtlineare Funktionen ist dies sogar in eine Dimension ($n = 1$) nicht mehr möglich. Wir untersuchen den Fall eines Polynoms $P(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j$ von Grad $k \geq 0$ mit reelle Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nur für ungerade k bijektiv sein kann.

(ii) Zeigen Sie, dass $P_{2j+1}(x) = x^{2j+1} + (2j+1)x$ bijektiv von \mathbb{R} auf \mathbb{R} für jede ganze Zahl $j \geq 1$ ist.

(iii) Die Galoistheorie besagt dass eine allgemeine polynomiale Gleichung von Grad $k \geq 5$ nicht durch Radikale auflösbar ist³, aber für $k \leq 4$ gibt es solche Formeln. Die Formeln für $k = 1$ und $k = 2$ sollten Ihnen bekannt sein, während die so genannte Cardano-Formel für $k = 3$ allgemein sehr kompliziert ist und nur in Einzelfälle benutzt wird, z.B. zeigen Sie, dass

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} + 1}}$$

die Inverse von P_3 ist.

¹Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Falls die Matrix $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertierbar für ein $x_0 \in U$ ist, dann gibt es eine offene Umgebung U_0 von x_0 und eine offene Umgebung V_0 von $y_0 = f(x_0)$, so dass f die Menge U_0 bijektiv auf V_0 abbildet, mit der Umkehrfunktion $\varphi = f^{-1} \in C^1(V_0, \mathbb{R}^n)$. Weiter gilt $D\varphi(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$.

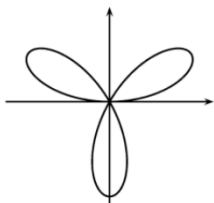
²D.h. falls $P(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $P(x) = \sum_{k=1}^N [Q_k(x)]^2$, wobei jedes Polynom Q_k reelle Koeffizienten hat.

³Z.B. weist die allgemeine Lösungsformel für die einzige reelle Lösung der Gleichung $x^5 + 5x = a$ die transzendente Thetafunktionen der komplexen Analysis auf.

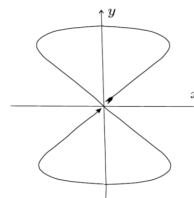
8. [Wiederholungsaufgabe] Ein Korollar zum Satz von der Umkehrabbildung ist der Satz über implizite Funktionen⁴. Beweisen Sie diese Aussage.

9. [Wiederholungsaufgabe] In Kepler's astronomische Untersuchungen spielt die Gleichung $x = y - \varepsilon \sin(y)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in (0, 1)$, eine wichtige Rolle. Zeigen Sie, dass man y als eine stetig differenzierbare Funktion von x für (x, y) nahe an $(0, 0)$ auffassen kann, d.h. $y = f_\varepsilon(x)$. Weiter gilt $f_\varepsilon(x) \approx \frac{1}{1-\varepsilon} x$ für $|x|$ klein genug⁵. Diese Approximation ist wichtig ist da es leider keine einfache Formel für f_ε gibt.

10. Eine ebene Kurve kann man auch in Polarkoordinaten ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) definieren, z.B. ähnelt die Spur von $r = \sin(3\theta)$ einer dreiblättrigen Blume. Finden Sie eine C^∞ -Parametrisierung dieser Kurve.



Dreiblättrige Blume (Übung 10).

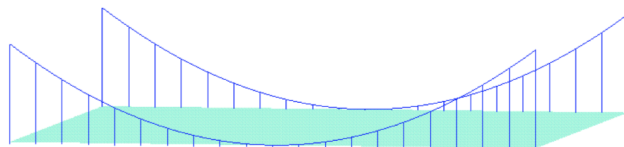


Figur Acht (Übung 11).

11. Zeigen Sie, dass $\alpha(t) = (\sin(2t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, eine differenzierbare Abbildung ist, die lokal aber nicht global injektiv ist (die Spur der Kurve ist die Figur Acht).

12. Der Skalarprodukt der Vektoren $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ und $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ wird durch $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \|u\| \|v\| \cos \theta$ definiert, wobei $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ und $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ die Norm (oder Länge) von u bzw. v ist, während $\theta \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den Segmenten Ou und Ov ist; $O = (0, 0, 0)$ ist der Ursprung von \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass die Tangenten an die reguläre parameterisierte Kurve $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, einen konstanten Winkel mit der Geraden $[y = 0, z = x]$ bilden.

13. Zeigen Sie, dass alle Wege $\alpha(t) = (t^{2k+1}, t^{2k+1})$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $k \geq 0$ eine ganze Zahl ist, diesselbe Spur aufweisen. Welche dieser Parametrisierungen sind regulär?



Skizze der tragenden Kabel einer Hängebrücke (Übung 14).

14. Der Kabel einer Hängebrücke mit gleichverteiltem Gewicht hat näherungsweise die Form einer Parabel $y = hx^2$ mit $h > 0$, wenn das Eigengewicht des Kabels vernachlässigbar ist und der Ursprung am tiefsten Punkt des Kabels gewählt wird. Berechne⁶ die Bogenlänge der Parabel zwischen den gleich hohen Aufhängepunkten mit x -Koordinaten $x = \pm d/2$ (im Abstand $d > 0$).

15. Zeigen Sie, dass der Weg $\alpha(t) = \left(t, t^2 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$ für $t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \setminus \{0\}$ und $\alpha(0) = (0, 0)$ eine unendliche Bogenlänge von $t_0 = 0$ aus hat. [Bemerkung: die Abbildung α ist nicht stetig differenzierbar.]

16. Sei $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine parameterisierte Kurve der Klasse C^1 . Für $t_1 < t_2$ in (a, b) , sei $\alpha(t_1) = p$ und $\alpha(t_2) = q$ mit $q \neq p$. Zeige dass $\langle q - p, v \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \langle \alpha'(t), v \rangle dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$ für jeden konstanten Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$. Zeige weiter, dass eine günstige Wahl des Einheitsvektors v uns zu $\|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(t)\| dt$ führt, d.h. die Kurve kürzester Länge von $\alpha(t_1)$ nach $\alpha(t_2)$ ist die Gerade, die diese beide Punkte verbindet.

⁴Falls $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen sind, $F \in C^1(U \times V, \mathbb{R}^m)$ und die Matrix $D_y F(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar für ein $(x_0, y_0) \in U \times V$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ ist, dann gibt es offene Umgebungen $U_0 \subset U$ und $V_0 \subset V$ von x_0 und y_0 und eine Funktion $g \in C^1(U_0, V_0)$ mit $\{(x, y) \in U_0 \times V_0 : F(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) : x \in U_0\}$, d.h. der Graph von g ist die Menge $F^{-1}(0) \cap U_1 \times V_1$. Weiter gilt $Dg(x_0) = -[D_y F(x_0, g(x_0))]^{-1} \cdot D_x F(x_0, g(x_0))$.

⁵Im Sinne von $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{1}{1-\varepsilon} x}{x} = 0$.

⁶Mit Hilfe der Substitution $x = \frac{\sinh(u)}{2h}$, wobei $\sinh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$.

17. Sei $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre parametrisierte Kurve der Klasse C^3 . Zeigen Sie, dass $\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$ und $\tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$ die Krümmung bzw. die Torsion von α bei t ist.

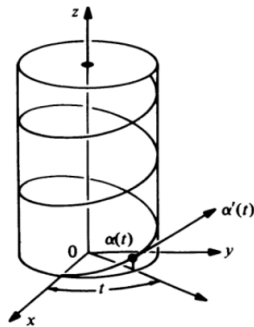
18. Zeigen Sie, dass

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0, \\ (0, 0, 0), & t = 0, \\ (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0, \end{cases}$$

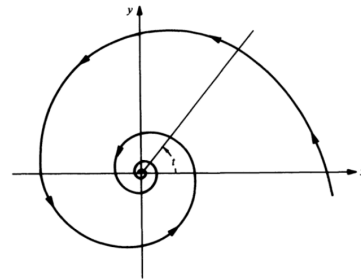
eine reguläre Kurve der Klasse C^∞ ist, mit Krümmung $\kappa(t) \neq 0$ falls $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ und $t \neq 0$. Weiter zeigen Sie, dass der Grenzwert $t \rightarrow 0^+$ der Schmiegeebenen die Ebene $[y = 0]$ ist, aber der Grenzwert $t \rightarrow 0^-$ der Schmiegeebene die Ebene $[z = 0]$ ist, d.h. der Normalvektor ist unstetig bei $t = 0$ und der singuläre Punkt von Ordnung 1 bei $t = 0$ muss ausgeschlossen werden.

19. Zeigen Sie, dass $\alpha(t) = (t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t})$, $t \in (0, \infty)$, eine ebene reguläre Kurve ist.

20. Man berechne die Krümmung und die Torsion der *Helix* $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$, mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Helix (Übung 20).

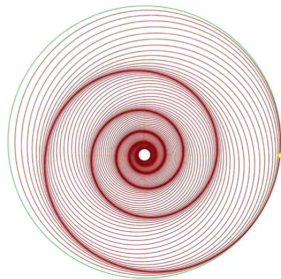


Logarithmische Spirale (Übung 21).

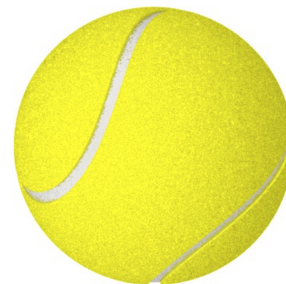
21. Zeige, dass für $t \rightarrow \infty$ die parametrisierte Kurve $\alpha(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t))$, $t > -1$, mit a und b konstant, $b < 0 < a$, gegen $(0, 0)$ konvergiert und sich um den Ursprung herumwindet; deshalb heißt die Spur von α *logarithmische Spirale*. Weiter, zeige dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\alpha'(t')\| dt' < \infty$, d.h. α hat endliche Bogenlänge.

22. Die Spur der Kurve $\alpha(t) = (a \cos(bt), a \sin(bt))$, $t > -\pi/b$, ist ein Kreis; hier ist $a > 0$ und $b > 0$. Finden Sie die Parametrisierung nach Bogenlänge vom Punkt $t = 0$ aus. Weiter, zeigen Sie, dass alle Krümmungskreise übereinstimmen indem Sie den Mittelpunkt und den Radius bestimmen.

23. Die *archimedische Spirale* entsteht wenn, in Polarkoordinaten (r, φ) , bei einer Drehbewegung in der Ebene der Radius r proportional zum Drehwinkel φ wächst: $r = a\varphi$ mit $a > 0$ und $\varphi > 0$. Finden Sie die Bogenlänge vom Punkt $(\frac{\pi a}{4\sqrt{2}}, \frac{\pi a}{4\sqrt{2}})$ aus. [Mit rechnerischen Aufwand kann man zeigen, dass die Krümmungskreise der archimedischen Spirale disjunkt und verschachtelt sind.]



Krümmungskreise der archimedischen Spirale (Übung 23).



Tennisballkurve (Übung 24).

24. Zeige, dass $\alpha(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(2t))$, $t \in \mathbb{R}$, eine reguläre Kurve ist (*Tennisballkurve* genannt: Tennisbälle besitzen eine typische Naht, die eine geschlossene Kurve darstellt). Finden Sie die Krümmungskugel der Tennisballkurve im Punkt $(1, 0, 0)$, ohne die Kurve nach der Bogenlänge zu parametrisieren.

25. Zeige, dass $f(z) = \alpha z + \beta$ und $g(z) = \alpha \bar{z} + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, Isometrien der euklidischen Ebene sind, wobei f orientierungserhaltend ist und g die Orientierung umkehrt.

26. Alle Isometrien von \mathbb{R}^n sind bijektiv. Zeige hingegen, dass eine Isometrie $f : X \rightarrow X$ eines metrischen Raumes (X, d) immer injektiv aber nicht unbedingt surjektiv ist.

27. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Isometrie der Ebene mit $f(0) = 0$. Zeige⁷, dass $f(z) = f(1)z$ oder $f(z) = f(1)\bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

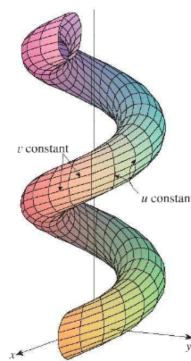
28. Eine Drehung ist eine Isometrie $x \mapsto Ax$ von \mathbb{R}^3 mit $\det(A) = 1$. Man beweise⁸ den Satz von Euler: jede Drehung in \mathbb{R}^3 hat eine Drehachse (ein Einheitsvektor der nicht geändert wird). Ist diese Aussage wahr für Drehungen von \mathbb{R}^2 ?

29. Das Exponential der reellen $n \times n$ Matrix A , welches mit e^A bezeichnet wird, ist die durch die Potenzreihe $I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ definierte $n \times n$ Matrix. Man zeige, dass diese Reihe immer konvergiert (die Matrix kann man als ein Vektor in \mathbb{R}^{n^2} auffassen). Weiter zeigen Sie, dass $x(t) = e^{tA}x_0$ Lösung des linearen Differentialsystems mit konstanten Koeffizienten $x'(t) = Ax(t)$ in \mathbb{R}^n mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist. Diese Formel ermöglicht uns, gewisse Differentialsysteme explizit zu lösen.

30. Aus der linearen Algebra wissen wir dass eine reelle $n \times n$ -Matrix A diagonalisierbar ist, falls man eine invertierbare reelle $n \times n$ -Matrix S finden kann, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist, dessen reelle Einträge λ_k die Eigenwerte von A sind (und wobei der k -te Spaltenvektor der Matrix S ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_k ist). Zeige dass, falls A diagonalisierbar ist, dann gilt $e^{tA} = S \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) S^{-1}$. Weiter, berechne e^{tA} für die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

31. Seien A und B reelle $n \times n$ -Matrizen. Falls $AB = BA$, zeige dass $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, aber diese Identität gilt allgemein nicht einmal für $n = 2$.

32. Die Theorie der linearen Differentialgleichungen besagt, dass man die eindeutige Lösung des Differentialsystems $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)$ mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, wobei $A(t)$ eine reelle $n \times n$ -Matrix mit stetige Einträge $a_{ij}(t)$ ist und $B(t)$ eine Vektor aus \mathbb{R}^n mit stetige Einträge $b_j(t)$ ist, mit Hilfe einer reellen $n \times n$ -Matrix Fundamentalmatrix $\Gamma(t)$ ausgedrückt werden kann, nämlich gilt $X(t) = \Gamma(t)x_0 + \int_0^t \Gamma(t)\Gamma^{-1}(s)B(s) ds$, wobei $\Gamma(0) = I_n$ und $\Gamma'(t) = A(t)\Gamma(t)$. Zeige, dass $\Gamma(t) = e^{\int_0^t a_{11}(s) ds}$ für $n = 1$ gilt. Leider ist es allgemein unmöglich, eine explizite Formel für $\Gamma(t)$ in Dimension $n \geq 2$ zu finden. Zeige, dass die Formel $\Gamma(t) = e^{\int_0^t A(s) ds}$ für $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & -1 \end{pmatrix}$ nicht gilt, da in diesem Fall $X(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ (t - \frac{1}{2})e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$ die Lösung des Differentialsystems $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

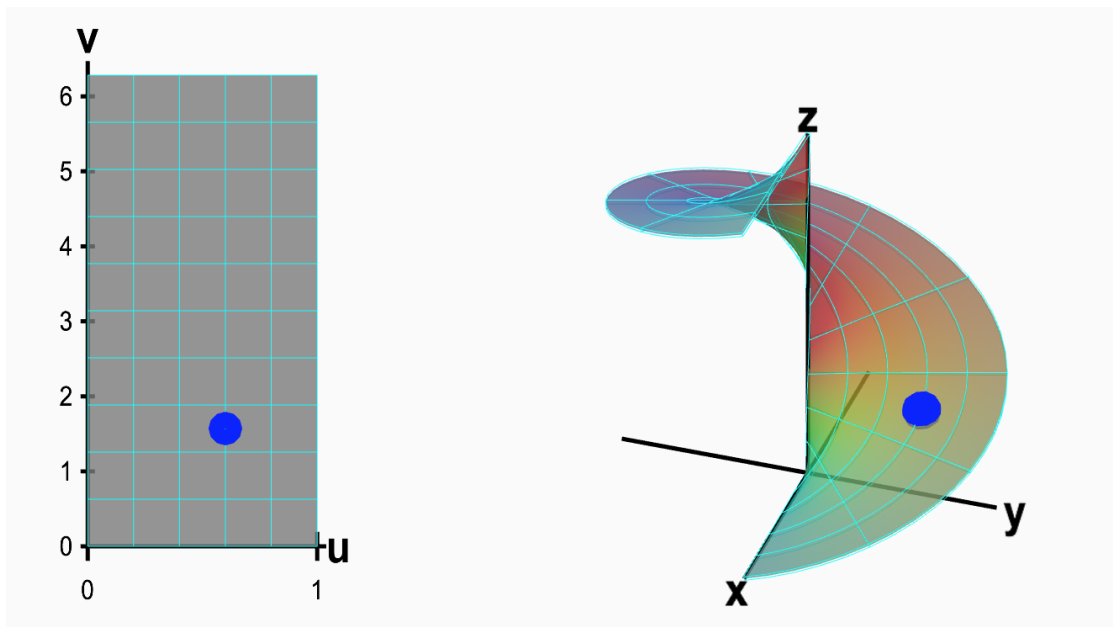


Skizze der Gitterlinien (oder Koordinatenlinien) der parametrisierten Fläche aus Übung 33, d.h. die Kurven, die zu $[u = \text{konstant}]$ und $[v = \text{konstant}]$ entsprechen.

33. Zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(u, v) = ([2 + \sin(v)] \cos(u), [2 + \sin(v)] \sin(u), u + \cos(v))$ eine regulär parametrisierte Fläche ist.

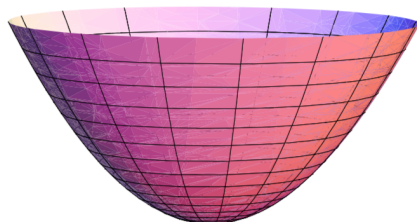
⁷Unter Berücksichtigung der Beziehung $\Re\{f(z)\overline{f(1)}\} = \Re\{z\}$, die aus $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$ folgt und zu $f(i) = \pm i f(1)$ führt. Weiter, $|f(z) - f(i)| = |z - i|$ führt zu $\Re\{f(z)\overline{f(i)}\} = \Re\{zi\}$ und man kann die Beziehung $\Im\{f(z)\overline{f(1)}\} = \pm \Re\{zi\}$ herleiten. Hier bezeichnet $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$ den Realteil und $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$ den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = a + ib$.

⁸Man zeige, dass jede reelle orthogonale 3×3 -Matrix den Eigenvektor $\lambda = 1$ hat.

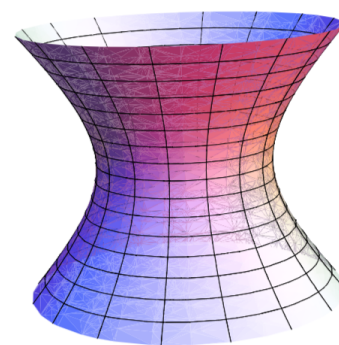


Gitterlinien einer Parametrisierung der Helikoide (Übung 34).

34. Zeige, dass $f(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), v)$ mit $0 < u < 1$ und $0 < v < 2\pi$ eine regulär parametrisierte Fläche ist.

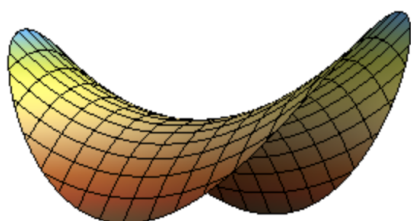


Elliptisches Paraboloid (Übung 35).



Revolutionsfläche (Übung 35).

35. Zeige, dass $f(u, v) = (\sqrt{1+u^2} \cos(v), \sqrt{1+u^2} \sin(v), u)$ und $g(u, v) = (v \cos(u), 2v \sin(u), 4v^2)$ mit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(u, v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ regulär parametrisierte Flächen sind. Anhand der entsprechenden Gitterlinien, identifizieren Sie die Flächen im beiliegenden Bild.



Übung 36: Hyperboloid (links) als typische Form – nach Durchführung einer Isometrie in \mathbb{R}^3 – des Pringles-Kartoffelchips (rechts).

36. Zeige, dass die Lösungsmenge der Gleichung $z = x^2 - y^2$, wobei $x^2 + y^2 < 9$, eine reguläre Fläche darstellt. Finde eine reguläre Parametrisierung dieser Fläche.

37. Zeige, dass die implizite Gleichung $z = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2$, wobei $0 < z < 3$, eine reguläre Fläche darstellt. Finde eine reguläre Parametrisierung dieser Fläche.



Parabolantenne der Erdfunkstelle Raisting in Bayern (Übung 37).



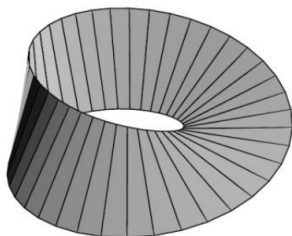
Aussenwände einer Kühlturmanlage, die überschüssige Wärme aus Industrieprozessen abführt (Übung 38).

38. Zeige, dass die implizite Gleichung $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(z - 10)^2 + 100$, wobei $0 < z < 20$, eine reguläre Fläche darstellt. Finde eine reguläre Parametrisierung dieser Fläche.

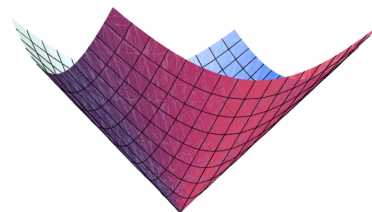
39. Ein Möbiusband⁹ entsteht, wenn man einen schmalen Streifen Papier einmal verdreht und dann zusammenklebt: man erhält eine Fläche, die nur eine Kante und eine Seite hat. Sei \mathcal{C} der Kreis in der (x, y) -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung und mit Radius 2, und sei \mathcal{L}_0 die Strecke in der (y, z) -Ebene, die durch $y = 2$ und $|z| < 2$ gegeben wird, mit $P = (0, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ als Mittelpunkt. Sei \mathcal{L}_θ die Strecke, die man durch eine Drehung von \mathcal{L}_0 um P in der (y, z) -Ebene mit Drehwinkel $\theta/2$ und einer gleichzeitigen Drehung von P entlang \mathcal{C} , im Urzeigersinn mit Drehwinkel θ erhält. Die Vereinigung $\mathcal{M} = \bigcup_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathcal{L}_\theta$ ist ein Möbiusband. Zeige, dass $\varphi, \hat{\varphi} : U \rightarrow \mathcal{M}$,

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \left(\left[2 - v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right] \sin(u), \left[2 - v \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right] \cos(u), v \cos\left(\frac{u}{2}\right) \right), \\ \hat{\varphi}(u, v) &= \left(\left[2 - v \sin\left(\frac{2u + \pi}{4}\right) \right] \cos(u), \left[-2 + v \sin\left(\frac{2u + \pi}{4}\right) \right] \sin(u), v \cos\left(\frac{2u + \pi}{4}\right) \right), \end{aligned}$$

wobei $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, -1 < v < 1\}$, ein Atlas für \mathcal{M} ist.



Möbiusband: eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit (Übung 39).



Stumpfer Kegel: die Spitze fehlt (Übung 40).

40. Zeigen Sie, dass der Doppelkegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ keine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 ist¹⁰, während der stumpfe Kegel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ eine ist.

41. Zeigen Sie, dass die Antipodenabbildung $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ ein Diffeomorphismus der Einheitskugel $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist.

42. Konstruiere einen Diffeomorphismus zwischen dem Ellipsoid $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$ und der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

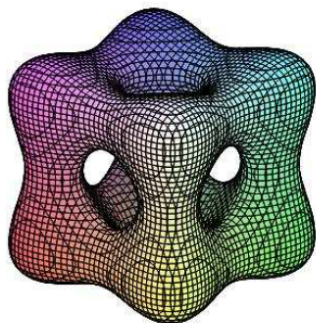
43. Sind die regulären Flächen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ diffeomorph?

44. Sind die regulären Flächen $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ diffeomorph?

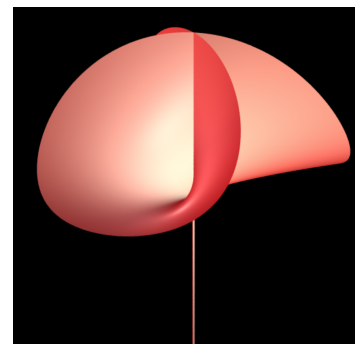
⁹Beschrieben im Jahr 1858 von dem Leipziger Mathematiker August Ferdinand Möbius.

¹⁰Hinweis: falls es eine offene Umgebung U_3 von $(0, 0, 0)$ in \mathbb{R}^3 und eine offener Ball U_2 in \mathbb{R}^2 gibt, mit Mittelpunkt $P = f^{-1}(0, 0, 0)$, die ein Diffeomorphismus $f : U_2 \rightarrow U_3 \cap K$ zulassen, so würde die offene Menge $M = U_2 \setminus \{P\}$ eine disjunkte Vereinigung von offene Mengen sein, was nicht möglich ist.

45. Für welche Werte des Parameters $c \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $z^2 - xz - yz + xy + c = 0$ eine reguläre Fläche?



Eine reguläre Fläche die viele Symmetrien aufweist (Übung 46).



Whitney Regenschirm (Übung 47).

46. Zeige, dass die implizite Gleichung $(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 + (z^2 - 1)^2 = \frac{3}{2}$ eine reguläre Fläche darstellt.

47. Zeige, dass die Parametrisierung $(u, v) \rightarrow (uv, u, v^2)$ mit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ Lösungen der Gleichung $x^2 - y^2z = 0$ ergibt, die entsprechende Fläche¹¹ aber nicht regulär ist¹².

48. Zeige, dass obwohl die Funktion

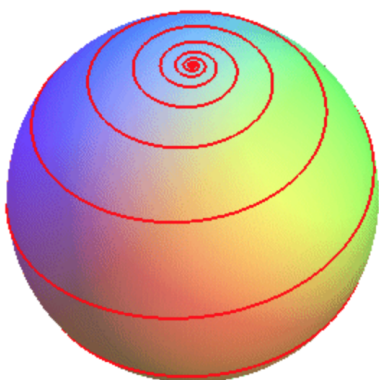
$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

nicht stetig in $(0, 0, 0)$ ist, ist ihre Einschränkung auf der regulären Fläche $z = x^2 + y^2$ (elliptisches Paraboloid) differenzierbar.

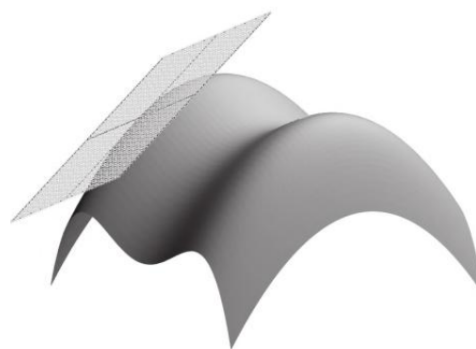
49. Zeige, dass auf den Teil der Kugel, der durch $\sigma(\varphi, \theta) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ mit $(\varphi, \theta) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ parametrisiert wird, die Kurven¹³

$$\log \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \pm \frac{\varphi - \varphi_0}{\tan \beta},$$

wobei $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, die Meridiane $[\theta = \text{konstant}]$ immer unter dem Winkel β schneiden.



Eine Loxodrome (Übung 49).



Eine Tangentialebene, die die Fläche nicht schneidet (Übung 50).

50. Finde die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $\sigma(-1.4, -1)$ für die reguläre Fläche, die durch

$$\sigma(u, v) = (u, v, 4 + 3u^2 - u^4 - 2v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

parametrisiert ist.

¹¹Siehe die Animation <https://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/animationenvonflaechen/Galleries/whitney.gif>

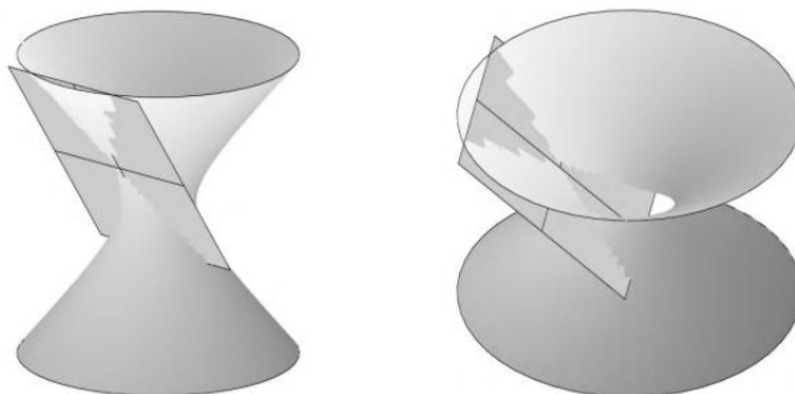
¹²Hinweis: sonst wäre die Fläche in einer Umgebung von $(0, 0, 0)$ Graph einer differenzierbaren Funktion von einer der drei Formen: $z = f(x, y)$, $x = g(x, z)$, $x = h(x, y)$.

¹³Gennant Loxodrome (gr. loxos=schief, dromos=Lauf): in der Segelfahrt war ein fixer Kompasskurs am einfachsten (abgesehen davon, dass der magnetische Pol nicht mit dem geografischen Nordpol identisch ist).

51. Finde die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $\sigma(1, 0)$ für die reguläre Fläche, die durch

$$\sigma(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

parametrisiert ist.



Jede Tangentialebene schneidet die Fläche des einschaligen Hyperboloids $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ (Übung 51).

52. Bestimme die erste Fundamentalform der Helikoide (Übung 34).

53. Berechne die erste Fundamentalform der Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ in der lokalen Parametrisierung, die durch die Inverse der stereographische Projektion vom Nordpol,

$$\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

gegeben ist.

54. Berechne die erste Fundamentalform der unteren Sphärenhälfte S^2_- in der Parametrisierung

$$(u, v) \rightarrow (x, y, -\sqrt{1-u^2-v^2}) \quad \text{mit} \quad u^2 + v^2 < 1.$$

55. Berechne die Gauß-Abbildung und das Differential der Gauß-Abbildung für die Sphäre

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

mit $R > 0$.

56. Berechne die Gauß-Abbildung und das Differential der Gauß-Abbildung für den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$.

57. Berechne das Bogenlängenelement ds für die Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ mit $R > 0$.

58. Berechne das Bogenlängenelement ds für den Paraboloid $z = x^2 + y^2$.

59. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Zeige dass das Bogenlängenelement ds unabhängig von der Wahl der Parametrisierung ist.

60. Betrachte für den Paraboloid $z = x^2 + y^2$ die zwei Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma(u, v) &= (u, v, u^2 + v^2), \\ \hat{\sigma} : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \hat{\sigma}(r, \theta) &= (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2). \end{aligned}$$

Ist eine von diesen orthogonal (d.h. mit $\sigma_u \perp \sigma_v$ oder mit $\hat{\sigma}_r \perp \hat{\sigma}_\theta$)?

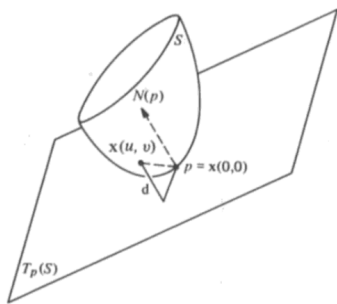
61. Betrachte die reguläre Kurve

$$\alpha : (\pi/4, 3\pi/4) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \alpha(t) = (0, \cos t, \sin t),$$

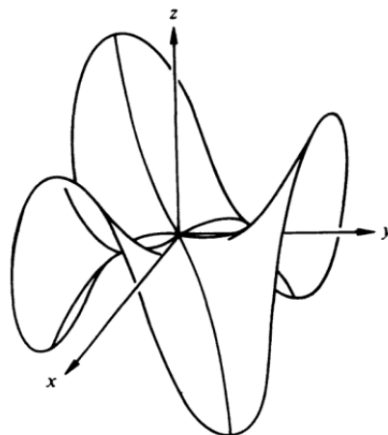
in der (y, z) -Ebene, die keine Selbstschneidungen oder Schnittpunkte mit der z -Achse aufweist. Berechne die Gauß-Krümmung der Rotationsfläche die man erhält, wenn man die Kurve α um die z -Achse dreht.

62. $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Zeige: falls $P \in S$ ein elliptischer Punkt ist, dann gibt es eine Umgebung \mathcal{W} von P in S , so dass alle Punkte in \mathcal{W} auf derselben Seite der Tangentialebene $T_P S$ liegen.

63. $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Zeige: falls $P \in S$ ein hyperbolischer Punkt ist, dann gibt es jeder Umgebung \mathcal{W} von P in S Punkte, die auf beiden Seiten der Tangentialebene $T_P S$ liegen.



Reguläre Fläche S in der Nähe eines elliptischen Punktes: der Abstand d eines Punktes $\chi(u, v)$ zur Tangentialebene $T_P S$, durch $d(u, v) = \langle \chi(u, v) - \chi(0, 0), N_P \rangle$ gegeben, wobei χ eine Parametrisierung mit $\chi(0, 0) = P$ ist, hat ein festes Vorzeichen (Übung 62).



Der "Affensattel" (Übung 64).

64. Der "Affensattel" ist durch die Parametrisierung $\sigma(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$ mit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeige dass der Ursprung $\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ ein Flachpunkt dieser regulären Fläche S ist und in jeder Umgebung dieses Punktes gibt es Punkte auf beiden Seiten der Tangentialebene $T_{\mathbf{0}} S$.

65. Berechnen Sie $\iint_Q \cos(x) \sin(y) \, dx dy$, wobei Q das Quadrat $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ ist.

66. Berechnen Sie $\iint_R (x^2 y^2 + xy) \, dx dy$, wobei R das Rechteck $[0, 2] \times [-1, 0]$ ist.

67. Berechnen Sie $\iint_R y e^{xy} \, dx dy$, wobei R das Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$ ist.

68. Berechnen Sie $\iint_R (xy)^2 \cos(x^3) \, dx dy$, wobei R das Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$ ist.

69. Berechnen Sie $\iint_R \sin^{2019}(xy) \, dx dy$, wobei R das Rechteck $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ist.

70. Sei

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 2y, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das iterierte Integral $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ existiert, f jedoch nicht auf das Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$ Riemann integrierbar ist.

71. Berechnen Sie $\iint_D \frac{\sin(x)}{x} \, dx dy$, wobei D das Dreieck $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi], 0 \leq y \leq x\}$ ist.

72. Berechnen Sie $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{1+y^3} \, dy dx$.

73. Zeigen Sie, dass $\sin(x) \geq 2x/\pi$ für $x \in [0, \pi/2]$ gilt, und benutzen Sie diese Ungleichung zu bestätigen, dass $\int_0^{\pi/2} \ln \sin(x) \, dx$ existiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $u = \pi/2 - t$, dass $\int_0^{\pi/4} \ln \cos(x) \, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin(t) \, dt$.

Weiter, zeigen Sie mit Hilfe der trigonometrischen Formel $\sin(x) = 2 \sin(x/2) \cos(x/2)$ und der Substitution $x/2 = u$, dass¹⁴ $\int_0^{\pi/2} \ln \sin(x) \, dx = -(\pi \ln 2)/2$ und berechnen Sie $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \ln |\sin(x - y)| \, dx dy$.

74. Zeigen Sie, dass $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \, dx dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

75. Berechnen Sie $\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2+y^2} \, dx dy$, wobei $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

76. Berechnen Sie $\int_0^1 \int_0^n x^y \, dy dx$ um die Formel $\int_0^1 \frac{x^n - 1}{\ln x} \, dx = \ln(1 + n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen.

¹⁴Es ist bemerkenswert, dass man das Integral genau berechnen kann, ohne eine explizite Stammfunktion zu finden.

77. Berechnen Sie $\iint_{\mathcal{R}} \ln(x^2 + y^2) dx dy$, wobei \mathcal{R} das im ersten Quadrant liegende Bereich zwischen den Kreisbögen $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 + y^2 = 4$ ist.

78. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Helikoide die durch $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, mit $u \in [0, 2\pi]$ und $v \in [0, 1]$ dargestellt wird.

79. Berechnen Sie die Fläche der Kugel $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ mit Radius $R > 0$.

80. Berechnen Sie das Volumen der Kugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ mit Radius $R > 0$.

81. Berechnen Sie $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$ für $F(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$, wobei S die Fläche $[x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, z \leq 0]$ ist, mit dem Normaleinheitsvektor der nach oben zeigt.

82. Verifizieren Sie den Satz von Stokes für die obere Halbkugel $[z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0]$, und das radiale Vektorfeld $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

83. Berechnen Sie das Flächenintegral $\iint_S (\nabla \times F) \cdot dS$ für $F(x, y, z) = (x^3, -y^3, 0)$, wobei S die Halbkugel $[x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0]$ ist.

84. Integrieren Sie direkt und mit Hilfe des Satzes von Stokes $\nabla \times F$ für $F(x, y, z) = (3y, -xz, -yz^2)$ über den Teil der Fläche $2z = x^2 + y^2$ unter der Ebene $z = 2$.

85. Berechnen Sie das Flächenintegral von $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ über die Oberfläche der Einheitskugel.

86. Berechnen Sie das Flächenintegral $\iint_S F \cdot N dA$ von $F(x, y, z) = (1, 1, z(x^2 + y^2))$ über die Fläche S des Zylinders $[x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1]$.

87. Beweisen Sie die Identität

$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$$

für C^1 -Funktionen $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

88. Beweisen Sie die *Formeln von Green*

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot N dS &= \iiint_{\Omega} (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV, \\ \iint_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot N dS &= \iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dV, \end{aligned}$$

für C^2 -Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; hier ist $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ der Laplace-Operator und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Bereich, dessen Rand $\partial\Omega$ eine reguläre Fläche ist.

89. Sei $\{r_n\}_{n \geq 1}$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen aus $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \\ 0, & x \notin \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \end{cases}$$

Riemann integrierbar sind und $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existiert, aber nicht Riemann integrierbar ist.

90. Geben Sie ein Beispiel von Riemann integrierbare Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit der Eigenschaft dass die reelle Folge $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ für jedes $x \in [0, 1]$ monoton wachsend ist, und somit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in [0, 1]$ existiert, aber f nicht Riemann integrierbar ist.

91. Sei $\lambda \in (0, \frac{1}{3}]$. Wir setzen $C_0^\lambda = [0, 1]$, $C_1^\lambda = [0, \frac{1-\lambda}{2}] \cup [\frac{1+\lambda}{2}, 1]$. Für $n \geq 1$ definieren wir die Menge C_n^λ induktiv als die Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen derselben Länge, die entstehen indem man im Schritt n den offenen mittleren Teil der Länge $\frac{\lambda}{3^{n-1}}$ von jedem der 2^{n-1} Intervallen der Menge C_{n-1}^λ wegwischt. Sei $C^\lambda = \bigcap_{n \geq 0} C_n^\lambda$. Zeigen Sie, dass C^λ eine kompakte Menge ist, die keinen Intervall enthält und keinen isolierten Punkt¹⁵ aufweist. Weiter, nur für $\lambda = \frac{1}{3}$ ist C^λ eine Nullmenge.

92. Benutze Übung 91 für $\lambda = \frac{1}{6}$ um eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zu bauen, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \chi(C^{1/6})$ ist, wobei $\chi(C^{1/6})$ die charakteristische Funktion der Menge $C^{1/6}$ ist. Zeigen Sie, dass man somit eine Cauchy-Folge $\{f_n\}_{n \geq 1}$ bezüglich der Riemannschen Distanz $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ erhält, dessen Grenzwert (in der Klasse der Funktionen die Riemann integrierbar sind) nicht existiert.

¹⁵ $x \in C^\lambda$ ist isoliert, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $C^\lambda \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}$.

93. Sei $C^{1/6}$ die Cantor-Menge erhalten in Übung 91 für $\lambda = \frac{1}{6}$. Die Menge $[0, 1] \setminus C^{1/6}$ besteht aus einer abzählbarer Vereinigung von disjunkten Intervallen $I_n = (a_n, b_n)$ der Länge $l_n = b_n - a_n$ ($n \geq 1$). Für jedes $n \geq 1$, sei $J_n = [c_n, d_n]$ das abgeschlossene Intervall der Länge l_n^2 , zentriert in der Mitte von I_n . Definiere $f : \bigcup_{n \geq 1} J_n \rightarrow [0, 1]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 2(x - c_n)/l_n^2, & c_n \leq x \leq (c_n + d_n)/2, \\ 2(d_n - x)/l_n^2, & (c_n + d_n)/2 \leq x \leq d_n, \end{cases}$$

und erweitere $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch $f(x) = 0$ falls $x \notin \bigcup_{n \geq 1} J_n$. Zeigen Sie, dass die beschränkte Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ nicht Riemann integrierbar ist, obwohl f die Ableitung einer Funktion F ist. Somit existiert das Riemann-Integral $\int_0^1 F'(x) dx$ nicht.

94. Seien $\{B_n\}_{n \geq 1}$ Lebesgue-messbare Untermengen von \mathbb{R} mit $\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \infty$. Zeigen Sie, dass die Menge der Punkte die in unendlich vielen B_n 's enthalten sind eine Nullmenge ist.

95. Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine Lebesgue-messbare Funktion. Falls $\int_0^1 f(x) dx = 0$, zeigen Sie, dass $f = 0$ fast überall (d.h., es gibt eine Nullmenge $M \subset [0, 1]$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1] \setminus M$ gilt).

96. Zeigen Sie, dass falls $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist, dann gibt es für jeden $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $\int_A |f(x)| dx < \varepsilon$ für jede Lebesgue-messbare Menge $A \subset [0, 1]$ mit $m(A) < \delta$.

97. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie, dass $m\{|f| \geq a\} \leq \frac{1}{a^2} \int_0^1 |f(x)|^2 dx$ für alle $a > 0$ gilt.

98. Zeigen Sie, dass falls $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion ist, dann ist $f^{-1}(c)$ Lebesgue-messbar für jedes $c \in \mathbb{R}$. Reicht diese Bedingung um die Lebesgue-Messbarkeit der Funktion f zu sichern?

99. Zeige anhand eines Beispiels, dass Gleichheit im Lemma von Fatou nicht zu erwarten ist.

100. Zeige anhand eines Beispiels, dass man in dem Satz über die dominierte Konvergenz auf die dominierende Funktion nicht verzichten kann.

101. Zeigen Sie, dass $L^p[0, 1]$ für $1 \leq p < \infty$ ein separabler¹⁶ Raum ist.

102. Zeigen Sie, dass $L^\infty[0, 1]$ ein nicht-separabler Raum ist.

103. Zeigen Sie, dass $L^p[0, 1] \subsetneq L^q[0, 1]$ falls $1 \leq q < p \leq \infty$.

104. Zeigen Sie die Ungültigkeit der Beziehung $L^p(\mathbb{R}) \subsetneq L^q(\mathbb{R})$ falls $1 \leq q < p \leq \infty$.

105. Für $\alpha \in (0, 1)$, sei $L^\alpha[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Lebesgue messbar mit } |f|^\alpha \in L^1[0, 1]\}$. Zeigen Sie, dass $L^\alpha[0, 1]$ ein Vektorraum, aber $\|f\|_\alpha = \left(\int_0^1 |f(x)|^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$ keine Norm ist.

106. Zeigen Sie, dass falls $\{f_n\}_{n \geq 1}$ eine Folge in $L^1[0, 1]$ ist, mit $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ fast überall, dann gilt¹⁷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$ falls $f \in L^1[0, 1]$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx$. Zeige anhand eines Beispiels, dass die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx$ wesentlich ist.

107. (Jensen-Ungleichung) Zeigen Sie, dass falls $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist, dann gilt¹⁸

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x) dx\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(x)) dx \quad \text{für alle } f \in L^1[0, 1] \text{ mit } \varphi \circ f \in L^1[0, 1].$$

Zeige anhand eines Beispiels, dass $\varphi \circ f \notin L^1[0, 1]$ möglich ist.

108. Zeigen Sie, dass für $f \in L^1[0, 1]$ gilt $e^{\int_0^1 f(x) dx} \leq \int_0^1 e^{f(x)} dx$.

¹⁶Ein topologischer Raum heißt separabel, wenn es eine höchstens abzählbare Teilmenge gibt, die in diesem Raum dicht liegt.

¹⁷Hinweis: zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \{|f_n(x)| - |f(x)|\} dx = \int_0^1 |f(x)| dx$.

¹⁸Hinweis/Annahme: die konvexe Funktion φ ist das punktweise Supremum einer Folge $\{\varphi_n : \varphi_n(x) = a_n x + b_n\}_{n \geq 1}$ von affinen Funktionen.